

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
ПОСТІЙНОГО СТРУМУ**

для студентів електротехнічних напрямів підготовки
0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”,
0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”,
0915 “Компютерна інженерія”.

Київ
НТУУ „КПІ” ФЕА
2006

Розрахунок електричних кіл постійного струму: для студентів електротехнічних напрямів підготовки 0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”, 0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”, 0915 “Компютерна інженерія”.

/ Уклад.: І. А. Курило, І. Н. Намацалюк, А. А. Щерба. – К.: НТУУ “КПІ”, 2006.- 51 с.

Навчальне видання

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

для студентів електротехнічних напрямів підготовки
0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”,
0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”,
0915 “Компютерна інженерія”.

Укладачі: Курило Ігор Анатолійович
Намацалюк Ігор Нестерович
Щерба Анатолій Андрійович

Відповідальний
редактор Ю. Ф. Видолоб, канд. техн. наук, доц.

Рецензент В. М. Андрієнко, канд. техн. наук, доц.

Важливою складовою організації самостійної роботи студентів, які вивчають курс теоретичної електротехніки, є виконання ними розрахунково-графічних робіт з ключових розділів курсу.

Допомогти студентам у їх самостійній роботі покликане це видання, у якому міститься стислий виклад теоретичного матеріалу, засвоєння якого необхідне для успішного розв'язання проблем аналізу лінійних електричних кіл постійного струму.

Наведені також конкретні приклади розрахунку таких кіл з оцінкою допустимих похибок і перевіркою правильності результатів.

Індивідуальне контрольне завдання має 1000 варіантів і складене так, щоб після його виконання студент активно оволодів основними алгоритмами аналізу лінійних електричних кіл постійного струму.

В курсі «Теоретичні основи електротехніки» (ТОЕ) вивчаються електромагнітні явища та процеси (як складові) в електротехнічних пристроях та системах, методи аналізу та синтезу. Розглядаються фізичні особливості цих явищ і процесів, закони, яким вони підлягають, математичний апарат для опису та аналізу з метою вивчення функціонування електротехнічних пристроїв та систем. ТОЕ це ключ до всіх без винятку технологічних і спеціальних дисциплін електротехнічного профілю.

1. Лінійні електричні кола постійного струму.

1.1 Основні поняття.

Електромагнітний пристрій з фізичними процесами, що протікають в ньому та в оточуючому його просторі, за певних умов замінюють деяким розрахунковим еквівалентом - електричним колом.

Електричне коло - сукупність з'єднаних між собою джерел електричної енергії та навантажень, в яких може протікати електричний струм. Електромагнітні процеси в електричному колі можна описати за допомогою понять, відомих із курсу фізики: струм, напруга, опір, провідність, індуктивність, ємність.

Електричний струм - направлений упорядкований рух часток, які несуть електричний заряд. Носії зарядів в металах - вільні електрони, в рідинах - іони.

Значення (сила) струму через деяку поверхню визначається зарядом, який проходить через неї за одиницю часу: $i = \frac{dq}{dt}$.

В електричному колі нас цікавить саме значення (сила) струму на кожній ділянці. Для стислості, термін “струм” вживають як синонім терміну значення (сила) струму. Напрямок руху додатніх зарядів на певній ділянці кола показують стрілкою, поряд з якою позначають струм літерою i . Тоді знак скалярної величини i дає інформацію про дійсний напрям руху зарядів на цій ділянці кола.

Постійний струм – струм, незмінний у часі (позначається великою літерою I). Упорядкований рух носіїв зарядів у провідниках спричиняється електричним полем, створеним в них джерелами електричної енергії.

Джерела електричної енергії перетворюють хімічну, механічну та інші види енергії на електричну.

Електрична схема - зображення електричного кола за допомогою умовних знаків (Рис. 1).

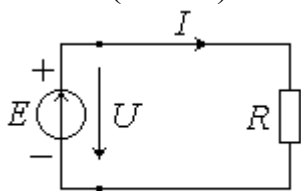


Рис. 1

Умовні позначення: E – джерело електричної енергії, електрорушійна сила (ЕРС) якого – E , I – струм, R – навантаження, опір (резистор), U – напруга на полюсах ЕРС.

ЕРС вимірюється у *вольтах (В)*, струм в *амперах (А)*, опір в *омах (Ом)*.

Джерело електричної енергії - активний елемент електричного кола, тому що примушує рухатися заряди між своїми полюсами проти кулонових сил.

Резистор - пасивний елемент електричного кола. Елементи кола описуються вольтамперною характеристикою (ВАХ). *Вольтамперна характеристика* - залежність струму, що проходить через елемент, від напруги на ньому. ВАХ можуть бути лінійними і нелінійними.

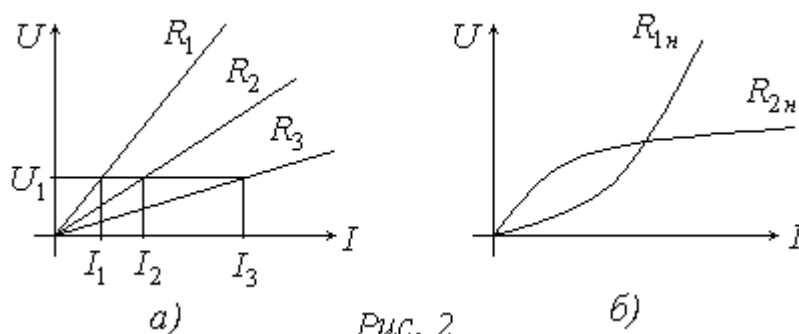


Рис. 2

На Рис. 2, а показані ВАХ для лінійних резисторів R_1, R_2, R_3 . Для лінійного резистора зв'язок між струмом і напругою на полюсах записується у вигляді: $U = R \cdot I$ або $I = G \cdot U$, де $G = \frac{1}{R}$. Це закон Ома для резистивного елемента кола.

Оскільки при одній і тій же напрузі U_1 струми різні (I_1, I_2, I_3), можна зробити висновок, що $R_1 > R_2 > R_3$. На Рис. 2, б показані ВАХ для нелінійних резисторів.

Для ідеального джерела енергії - *джерела напруги* ЕРС $E = U$, тобто напруга не залежить від струму, ВАХ показана на Рис.3, а. Реальне джерело має внутрішній опір R_0 , на якому є падіння напруги IR_0 , тому напруга на полюсах ЕРС залежить від струму (навантаження) Рис. 3, б. При опорі навантаження $R = 0$ в колі (Рис. 1) протікає струм короткого замикання $I_{кз}$, а напруга на клеммах ЕРС дорівнює нулю ($U=0$).

Із Рис. 3, б видно, що $U = E - IR_0$. Якщо прийняти m_u - масштаб по осі напруг, m_i - масштаб по осі струмів, то можна записати $m_u \cdot бв = IR_0$, $m_i \cdot аб = I$. Звідки :

$$R_0 = \frac{m_u \cdot бв}{m_i \cdot аб} = \operatorname{tg} \alpha \cdot k, \text{ де: } k = \frac{m_u}{m_i}.$$

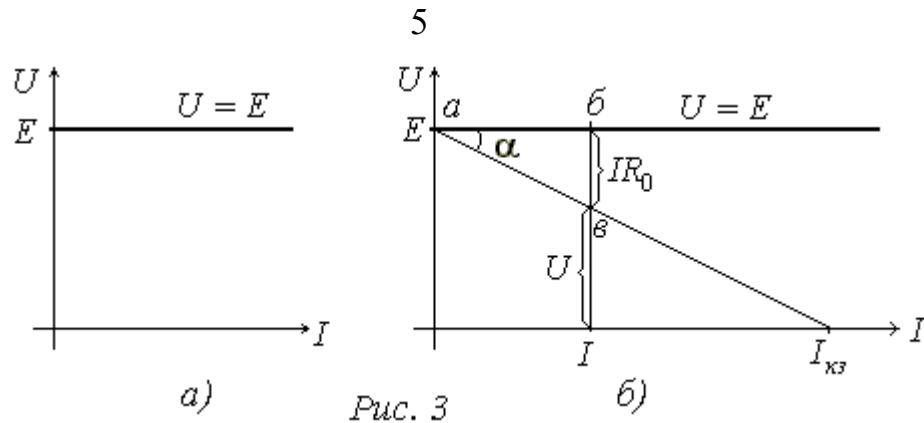
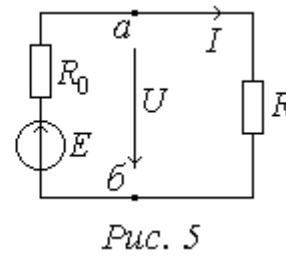
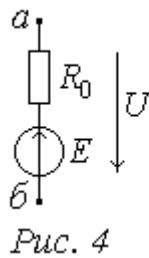


Схема заміщення реального джерела з внутрішнім опором R_0 зображається як показано на Рис. 4.



У замкненому електричному колі (Рис.5) протікає струм I . Напругу U , що дорівнює різниці потенціалів між точками a, b - $U = \varphi_a - \varphi_b$ можна визначити за двома шляхами:

$$U = IR; \text{ або } U = E - IR_0; \text{ отже } IR = E - IR_0; E = IR + IR_0.$$

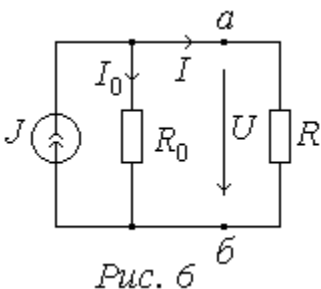
$$\text{Струм у колі: } I = \frac{E}{R + R_0}.$$

Експериментальне визначення ЕРС E і внутрішнього опору R_0

Для цього використовується рівняння $U = E - IR_0$. В режимі розриву навантаження ($I = 0$) вимірюється ЕРС $E = U$, при навантаженні ($I \neq 0$) вимірюється напруга U , струм I і визначається внутрішній опір $R_0 = \frac{E - U}{I}$.

Джерело струму. Якщо рівняння $U = E - IR_0$ розв'язати відносно струму I одержимо: $I = \frac{E}{R_0} - \frac{U}{R_0}$. Позначимо: $J = \frac{E}{R_0} = I_{кз}$, де $I_{кз}$ - струм короткого замикання у колі (Рис. 5).

$$\text{Отже: } I = J - \frac{U}{R_0}.$$



Останньому рівнянню відповідає еквівалентна схема з ідеальним джерелом струму J (Рис. 6).

Вольтамперна характеристика *ідеального джерела струму* показана на *Рис. 7, а*.

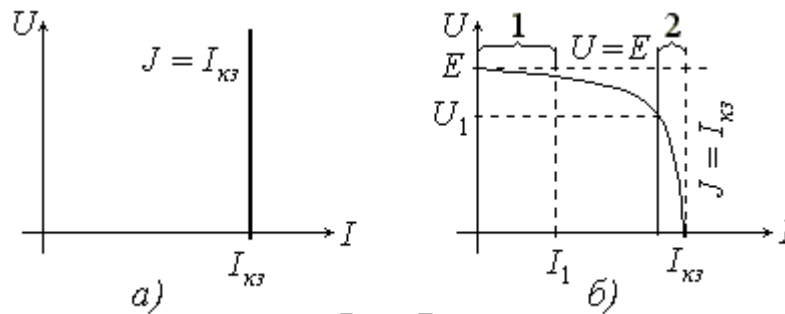


Рис. 7

Для *ідеального джерела напруги* навіть теоретично недопустимий режим короткого замикання ($R=0$), а для *ідеального джерела струму* - режим розімкненого кола ($R=\infty$).

Ідеальні джерела напруги та струму - джерела безмежної потужності.

ВАХ реального джерела енергії показана на *Рис. 7, б*. У залежності від опору навантаження R реальне джерело енергії за своїми властивостями наближається до джерела напруги або струму. Так при R набагато більшому від R_0 , тобто ($R \gg R_0$), можна вважати, що джерело працює в режимі близькому до джерела напруги, діапазон 1 ($0 \leq I \leq I_1$), при ($R \ll R_0$) – в режимі джерела струму, діапазон 2 ($0 \leq U \leq U_1$).

Перехід між двома рівноцінними схемами заміщення реального джерела здійснюється, як показано на *Рис. 8*, за формулами: $E = JR_0$, $J = \frac{E}{R_0}$.

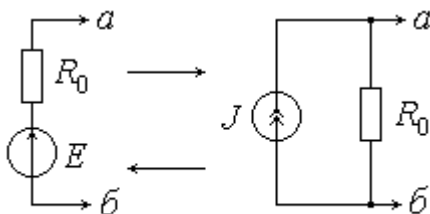


Рис. 8

Примітка: орієнтація стрілок для E і J однакова відносно полюсів a і b .

1.2 Структура електричного кола.

Кожен елемент електричного кола має, як мінімум, два зовнішні полюси, за допомогою яких він з'єднується з іншими елементами. Електричне коло утворюється об'єднанням полюсів елементів, які входять до його складу.

Аналіз електричного кола зводиться до визначення струмів і напруг всіх його елементів, якщо відомі параметри і спосіб з'єднання елементів між собою (структура, топологія).

З метою зменшення в розрахункових рівняннях кількості струмів і напруг для опису структури (топології) кола вводяться поняття: *вітка* і *вузол*.

Вітка – частина кола, яка розглядається відносно двох зовнішніх полюсів і характеризується струмом і напругою між цими полюсами. До складу вітки може входити один, або більша кількість елементів.

Основна вимога до внутрішньої структури вітки: повинна бути відомою, або легко знаходитись залежність між струмом і напругою на її зовнішніх полюсах. Найчастіше вітку утворюють декілька послідовно, або паралельно з'єднаних елементів.

Вузол – точка, в якій з'єднуються вітки між собою.

Отже, надалі будемо вважати, що *задача аналізу* електричного кола *полягає в знаходженні струмів і напруг всіх його віток*.

Структуру (топологію) електричного кола будемо розуміти як спосіб з'єднання між собою його віток. Дуже зручно показувати топологію кола у вигляді геометричної фігури – *графа*, який складається з *ребер*, що зображають вітки, і *вершин*, які зображають вузли кола.

На *Рис. 9* зображений орієнтований граф для кола (*Рис. 10*). Стрілками на кожному ребрі показують *напрямок струму вітки і одночасно напрям відрахунку напруги цієї вітки*.

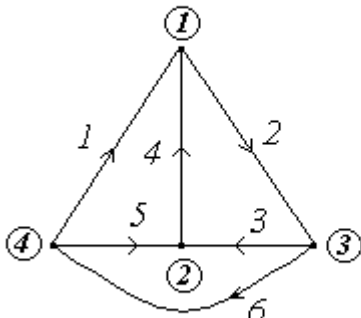


Рис. 9

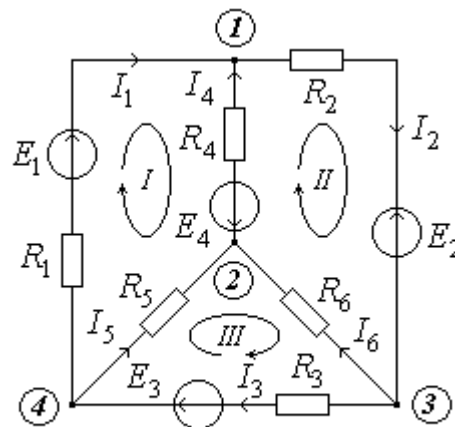


Рис. 10

Вітки, як і вузли, нумеруються натуральними числами. Граф називається *планарним*, якщо його можна розмістити на площині без перетину віток.

Структурні елементи графа:

1. *Шлях* – сукупність віток, які з'єднують початковий і кінцевий вузли. Якщо між двома будь-якими вузлами графа існує шлях, то граф називається *зв'язаним*, інакше *не зв'язаним*.
2. *Контур* – замкнений шлях, в якому початковий і кінцевий вузли співпадають. Для планарного графа вводиться поняття *простий*, або *елементарний контур* (вічко) – це контур, який не охоплює жодної вітки. Наприклад, на *Рис. 9* прості контури утворюються вітками: 1-4-5, 2-3-4, 3-5-6.
3. *Дерево* – сукупність віток, що з'єднують всі вузли, але не створюють жодного контура. На *Рис. 11, а, б, в* показані суцільними лініями три дерева того ж самого графа. Очевидно, що кількість віток дерева у зв'язаному графі на одиницю менша кількості вузлів: $n_d = n_{вз} - 1$.

Всі вітки графа, які не належать дереву називаються *вітками зв'язку*, або інакше, *хордами*. На *Рис. 11, а, б, в* вони показані пунктиром.

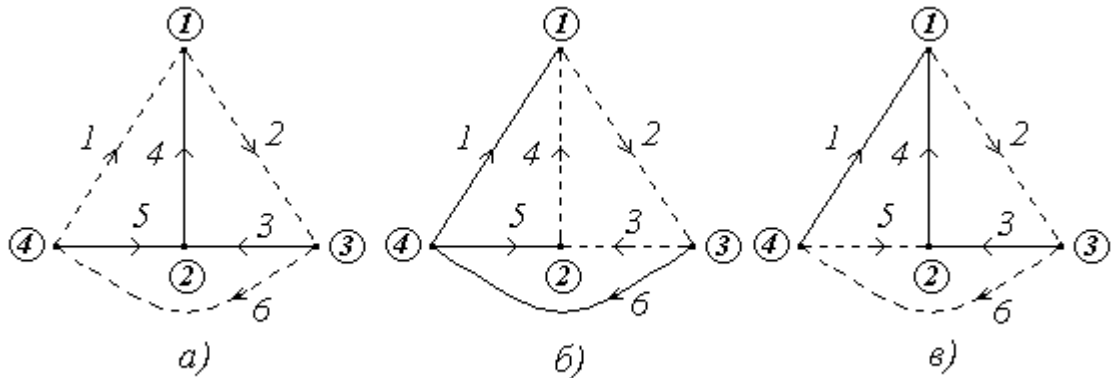


Рис. 11

Кількість віток зв'язку: $n_z = n_e - n_d = n_e - n_{ez} + 1$, де n_e – загальна кількість віток графа.

4. *Перетин* – сукупність віток, при видаленні яких граф розпадається на дві, не зв'язані між собою частини. Наприклад, на Рис. 9 вітки 6, 5, 4, 2 утворюють перетин, тому що при їх видаленні граф розпадається на дві незв'язані частини: між вузлами 1, 4 залишається вітка 1, між вузлами 2, 3 – вітка 3.
5. *Головний контур* – контур, до складу якого входить лише одна вітка зв'язку, а всі інші – вітки дерева.
6. *Головний перетин* – перетин, до складу якого входить лише одна вітка дерева, а всі інші – вітки зв'язку.

Очевидно, що для кожного графа кількість головних контурів дорівнює кількості віток зв'язку, а кількість головних перетинів – кількості віток дерева.

Конкретні сукупності віток, що належать головним контурам і головним перетинам, визначаються вибором дерева графа. Так, для дерева, показаного на Рис. 11, б головні контури утворені вітками: 2-1-6, 3-5-6, 4-1-5, головні перетини утворені вітками: 1-2-4, 5-3-4, 6-2-3. Проаналізуйте схеми кіл Рис. 11, а, в.

Струми і напруги у вітках підпорядковуються рівнянням, які поділяються на дві групи: *топологічні* і *компонентні*.

Топологічні рівняння визначаються топологією кола, тобто способом з'єднання віток між собою. Вони не залежать від внутрішньої структури віток і від того, які елементи входять до складу віток.

Спочатку розглянемо топологічні рівняння, які ґрунтуються на законах Кірхгофа для струмів і напруг.

1.3 Закони Кірхгофа.

I закон Кірхгофа (для струмів).

Алгебраїчна сума струмів всіх віток, які належать вузлу (або перетину), дорівнює нулю.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

Для запису першого закону Кірхгофа доволіно приймається правило знаків, наприклад: *струми, що входять у вузол беруться зі знаком «плюс» ті, що виходять - зі знаком «мінус».*

Запис закону для вузла (Рис. 12), для перетину (Рис. 13):

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

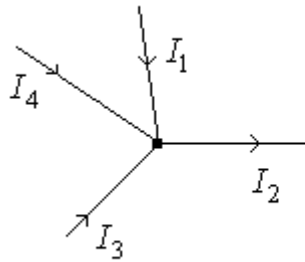


Рис. 12

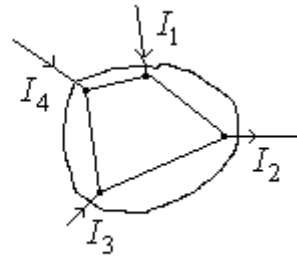


Рис. 13

Кількість незалежних рівнянь, які можуть бути складені за першим законом Кірхгофа для будь-якого кола, дорівнює кількості головних перетинів цього кола. Це пояснюється тим, що в кожному з рівнянь, складених для головних перетинів, буде фігурувати струм відповідної вітки дерева, якого не буде в інших рівняннях. Систему незалежних рівнянь за першим законом Кірхгофа одержимо також, записавши їх для незалежних вузлів кола, тобто для будь яких $n_{\text{вз}} - 1$ вузлів кола.

II закон Кірхгофа (для напруг).

Алгебраїчна сума напруг всіх віток, які належать замкнутому контуру, дорівнює нулю.

$$\sum_{k=1}^m U_k = 0$$

Якщо в одній частині рівняння залишити напруги на резисторах, а в іншій напруги на джерелах ЕРС, то другий закон Кірхгофа формулюють так:

У замкнутому контурі алгебраїчна сума напруг на опорах (резисторах) дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС контура.

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^m E_k$$

Для запису другого закону Кірхгофа довільно вибирається напрям обходу контура, наприклад, за годинниковою стрілкою. Напруги віток, орієнтовані за напрямом обходу контура записують зі знаком «плюс», орієнтовані протилежно - зі знаком «мінус». ЕРС, які орієнтовані за напрямом обходу записуються зі знаком «плюс», орієнтовані протилежно - зі знаком «мінус».

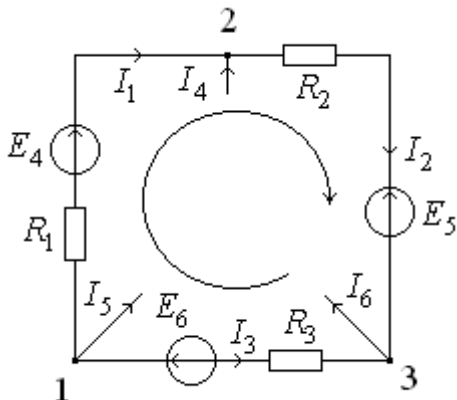


Рис. 14

Для замкнутого контура (Рис. 14) другий закон Кірхгофа записується так:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 = E_4 - E_5 + E_6$$

або так: $U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$.

Кількість незалежних рівнянь, які можуть бути складені за другим законом Кірхгофа для будь-якого кола, дорівнює кількості головних контурів цього кола. Це пояснюється тим, що в кожному з рівнянь, складених для головних контурів, буде фігурувати напруга відповідної вітки зв'язку, якої не буде в інших рівняннях.

Для планарного графа систему незалежних рівнянь за другим законом Кірхгофа одержимо, записавши ці рівняння для всіх простих контурів (вічок) кола, кількість яких дорівнює кількості віток зв'язку у планарному графі.

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа для раніше розглянутого кола (Рис. 10), для якого $n_e = 6$, $n_{e3} = 4$.

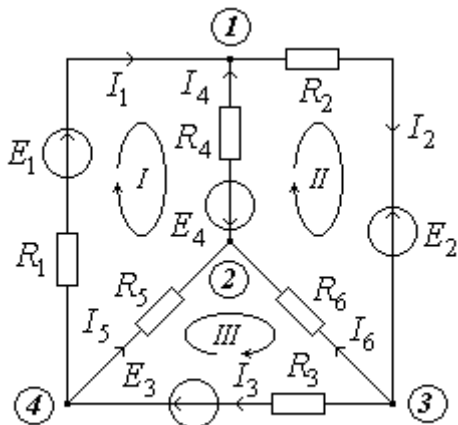


Рис. 10

За першим законом (три незалежні вузли):

$$\left. \begin{aligned} 1. I_1 + I_4 - I_2 &= 0, \\ 2. I_5 + I_6 - I_4 &= 0, \\ 3. I_2 - I_3 - I_6 &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ незалежні рівняння,}$$

$$4. I_3 - I_5 - I_1 = 0 \quad \text{- залежне рівняння (сума трьох перших рівнянь).}$$

За другим законом (три незалежних контури):

$$\left. \begin{aligned} 1. U_1 - U_4 - U_5 &= 0, \\ 2. U_2 + U_6 + U_4 &= 0, \\ 3. U_3 + U_5 - U_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ незалежні рівняння,}$$

$$4. U_1 + U_2 + U_3 = 0, \quad \text{- залежне рівняння (сума трьох перших рівнянь для зовнішнього контура).}$$

Висновок: для повної інформації про електричне коло досить скласти:

1. $n_{e3} - 1$ рівнянь за першим законом Кірхгофа для незалежних вузлів (перетинів кола).
2. $n = n_e - n_{e3} + 1$ рівнянь за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів кола.

Переходимо до розгляду компонентних рівнянь, що зв'язують струми і напруги віток.

1.4 Закон Ома для вітки кола постійного струму.

У колі постійного струму до складу вітки можуть входити резистивні елементи і джерела електричної енергії. Типова структура вітки з джерелом напруги показана на Рис. 15.

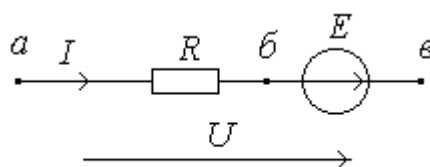


Рис. 15

Запишемо напругу між полюсами вітки, виразивши її через струм і параметри елементів вітки.

$$U_{ae} = U = U_{ab} + U_{be} = RI - E, \text{ отже}$$

$$\boxed{U = RI - E} \quad (1)$$

Розв'яжемо рівняння (1) відносно струму: $I = \frac{U}{R} + \frac{E}{R}$ і введемо позначення:

$$\boxed{G = \frac{1}{R}}, \quad \boxed{J = \frac{E}{R} = GE} \quad (2)$$

Отже: $\boxed{I = GU + J} \quad (3)$

Рівнянню (3) відповідає схема заміщення, показана на Рис. 16.

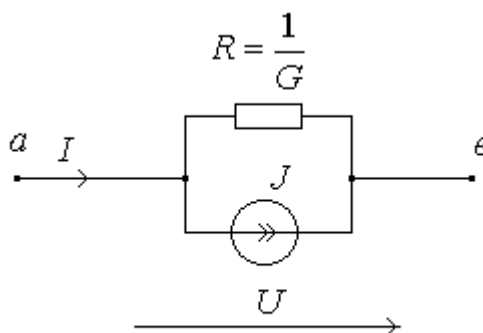


Рис. 16

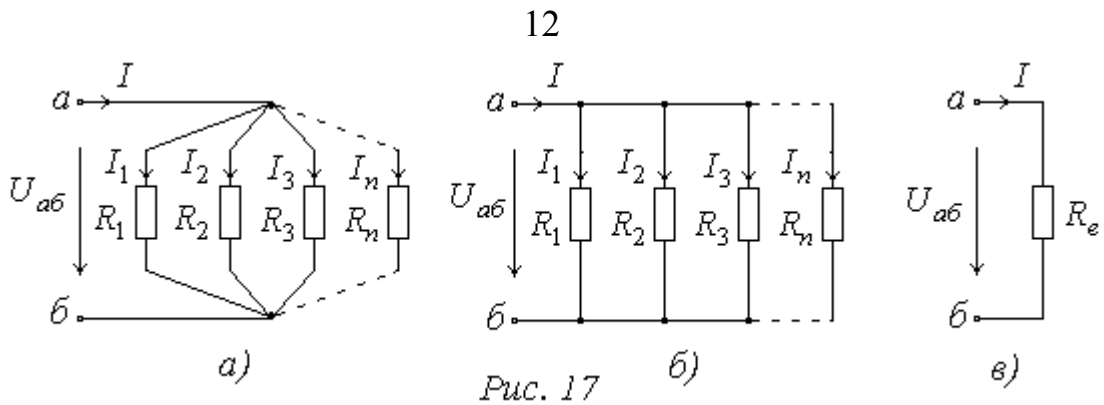
Рівняння (1) і (3), за умови виконання співвідношень (2), описують залежність між напругою і струмом однієї і тієї ж вітки. Отже вітка з послідовним з'єднанням резистора, опір якого R і джерела напруги, ЕРС якого E , завжди може бути замінена еквівалентною їй віткою з паралельним з'єднанням того ж резистора і джерела струму $J = \frac{E}{R}$. Від такої заміни напруги і струми всіх інших віток не зміняться.

Рівняння (1) і (3) виражають собою закон Ома для активної вітки з джерелами напруги або струму.

Якщо до складу вітки входять декілька опорів і джерел, з'єднаних послідовно, або паралельно, то шляхом еквівалентного перетворення кола можна завжди звести вітку до вигляду, показаного на Рис. 15 або Рис. 16.

Дійсно, розглянемо окремі типові з'єднання пасивних і активних елементів.

Паралельне з'єднання резисторів, (Рис. 17, а), при якому всі резистори ввімкнені між двома вузлами. Та ж схема може зображатись, як показано на Рис. 17, б, чи Рис. 17, в.



Згідно з першим законом Кірхгофа $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$. Напряга на всіх резисторах однакова $U = U_{a\delta}$ тому :

$$\frac{U}{R_e} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} \quad \text{або} \quad \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

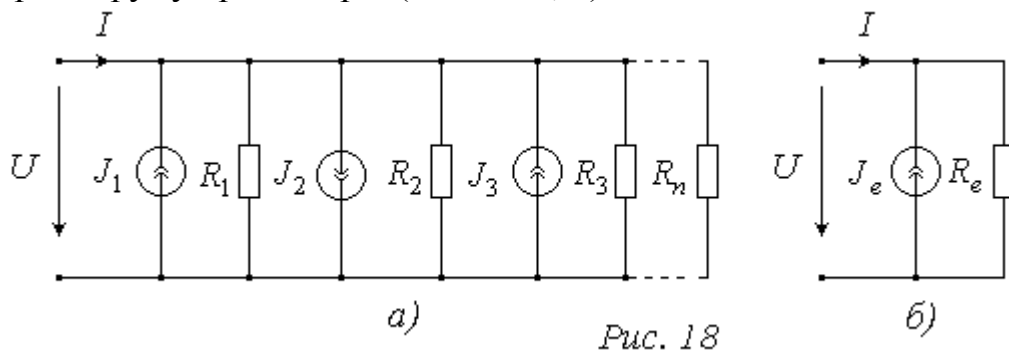
Отже паралельне з'єднання опорів (Рис. 17 б) можна замінити одним еквівалентним опором R_e , який у загальному вигляді визначається так:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Величина $\frac{1}{R} = G$ обернена опору - *провідність*, одиниця виміру - *Сіменс (Сім)*. При паралельному з'єднанні еквівалентна провідність G_e дорівнює сумі провідностей всіх резисторів:

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k$$

Аналогічно проводиться спрощення електричних кіл із паралельним з'єднанням джерел струму і резисторів (Рис. 18 а, б).



де $J_e = \sum_{k=1}^n \pm J_k$ - сума струмів алгебраїчна, $\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$.

Послідовне з'єднання резисторів, (Рис. 19 а), при якому у точках з'єднання відсутнє розгалуження, тобто через всі резистори проходить один і той же струм.

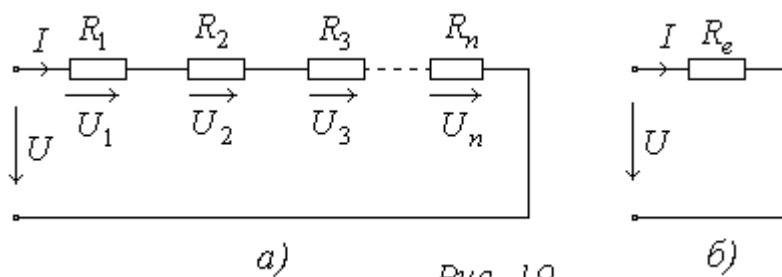


Рис. 19

Згідно з другим законом Кірхгофа: $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$. Послідовне з'єднання опорів можна замінити одним еквівалентним опором R_e (Рис. 19 б) з таких міркувань: $IR_e = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_n$, або: $IR_e = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$, звідки: $R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$

При послідовному з'єднанні опір еквівалентного резистора R_e дорівнює сумі опорів послідовно з'єднаних резисторів:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k$$

Аналогічно проводиться спрощення електричних кіл із послідовним з'єднанням джерел напруги (ЕРС) і резисторів Рис. 20 а, б.

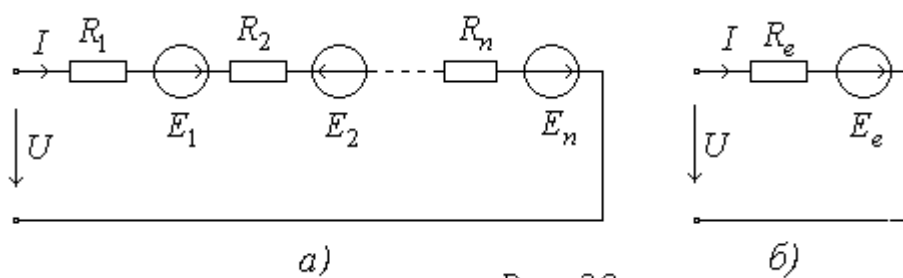


Рис. 20

де $E_e = \sum_{k=1}^n \pm E_k$ - сума ЕРС алгебраїчна, $R_e = \sum_{k=1}^n R_k$.

1.5 Потенціальні діаграми.

Потенціал чисельно дорівнює роботі по перенесенню одиничного додатного заряду із даної точки в точку фіксовану. Поверхня Землі, як провідника, екіпотенціальна, потенціал її зручно прийняти нульовим. Тому й поняття «заземлити» означає прийняти потенціал даної точки за нуль. Потенціал будь-якої точки в електричному колі можна прийняти за нульовий, потенціали всіх інших точок відповідно зміняться, але різниця потенціалів точок залишиться без зміни.

Напруга між двома точками дорівнює різниці потенціалів цих точок. Це легко довести, виходячи з того, що робота по перенесенню заряду уздовж замкненого шляху в потенціальному електричному полі дорівнює нулю. Тобто напруга між двома точками не залежить від шляху, а залежить лише від положення цих точок.

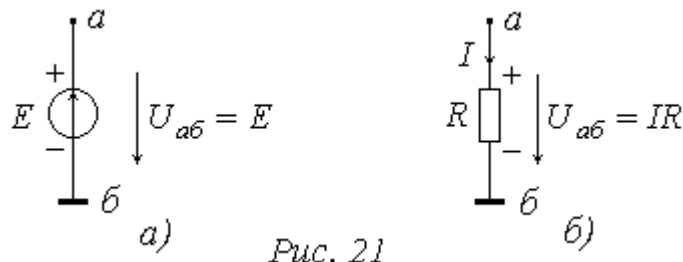


Рис. 21

На Рис. 21, а показана ідеальна ЕРС E і опір R (Рис. 21, б), по якому протікає струм I . Прийемо, що потенціал точки b дорівнює нулю, «заземлимо» цю точку, $\varphi_b = 0$. Потенціал точки a вищий потенціалу точки b на значення ЕРС E , $\varphi_a = E$. Напряга U_{ab} між точками a, b : $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = E$.

Тобто, якщо проходити через ЕРС від «-» до «+» то потенціал зростає на величину ЕРС, напряга $U_{ab} = E$ буде додатня у випадку проходження через ЕРС у напрямку від «+» до «-» (проти вістря стрілки).

Такі ж міркування застосуємо для опору зі струмом (Рис. 21, б). Прийемо потенціал точки b рівним нулю, $\varphi_b = 0$. Очевидно, що струм тече від точки з вищим потенціалом до точки з нижчим потенціалом, аналогічно, як і вода тече від верхнього рівня до нижнього. Тому потенціал точки a вищий від потенціалу точки b на величину падіння напруги IR на опорі R , $\varphi_a = IR$. Напряга між точками a, b : $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = IR$.

Висновок: на ділянці з опором R потенціал зростає на IR у напрямку проти струму, а напряга додатня у напрямку, співпадаючому зі струмом.

Очевидно, для розглянутих випадків напряга між точками b, a $U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a$ буде від'ємна.

На Рис. 22 показана частина електричного кола, з ЕРС (джерелами напруги) та опором, між точками a, b , по якій протікає струм I .

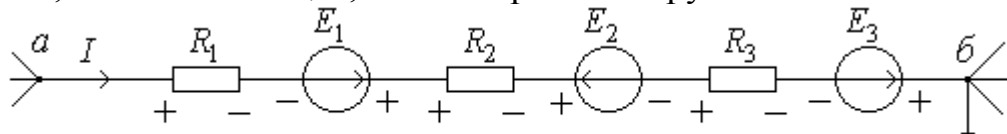


Рис. 22

Знайдемо потенціал точки a відносно потенціалу точки b , тобто напрягу між точками a і b :

$$\varphi_a = \varphi_b - E_3 + IR_3 + E_2 + IR_2 - E_1 + IR_1 = \varphi_b - E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3)$$

або $\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = -E_3 + E_2 - E_1 + I(R_1 + R_2 + R_3)$; звідки:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad I = \frac{U_{ab} + E_3 - E_2 + E_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Це запис закону Ома, де струм вітки між полюсами a, b виражається за напругою між полюсами і параметрами вітки.

Для визначення струму у вітці за законом Ома при відомих параметрах потрібно:

- 1) задатись довільним напрямком струму у вітці, наприклад, від точки a до точки b ,
- 2) в чисельнику записати напругу $U_{a\bar{b}}$ (а не $U_{\bar{b}a}$); ЕРС, напрям яких співпадає із вибраним напрямом струму, записати зі знаком «+», у протилежному разі - зі знаком «-»,
- 3) в знаменнику записати суму опорів вітки.
- 4) якщо в результаті розрахунків струм буде від'ємним, це означає, що напрям руху додатніх зарядів протилежний вибраному.

У загальному вигляді закон Ома записується так:

$$I = \frac{U_{a\bar{b}} + \sum_{k=1}^m E_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

Закон Ома для замкненого нерозгалуженого кола:

$$I = \frac{\sum_{k=1}^m E_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

Розглянемо нерозгалужене коло (Рис. 23), в якому діють дві ЕРС, нехай $E_1 > E_2$. Тоді згідно із законом Ома:

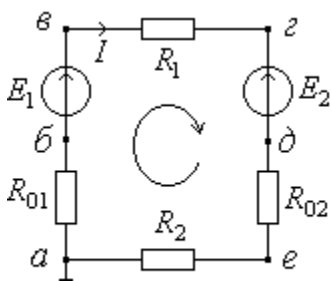


Рис. 23

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_{01} + R_{02} + R_2}$$

струм буде співпадати з напрямком E_1 . Прийmemo потенціал точки a за нульовий і визначимо потенціали інших точок кола відносно нього. $\varphi_a = 0$;

$$\varphi_b = \varphi_a - IR_{01}; \varphi_c = \varphi_b + E_1; \varphi_d = \varphi_c - IR_1; \varphi_e = \varphi_d - E_2;$$

$$\varphi_a = \varphi_e - IR_{02}; \varphi_a = \varphi_e - IR_2.$$

Розподіл потенціалів вздовж контура зручно зображати потенціальною діаграмою (Рис. 24).

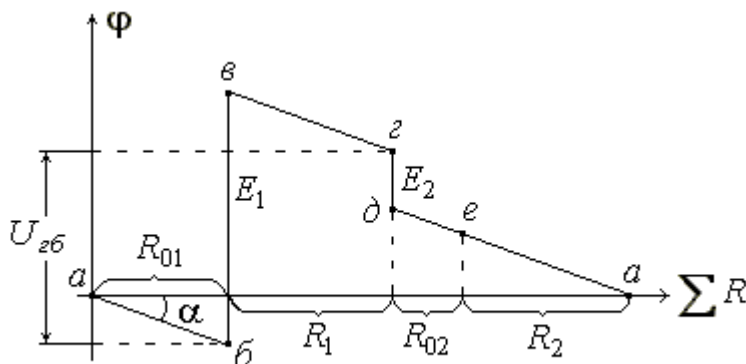


Рис. 24

По вертикальній осі відкладаються потенціали точок, по горизонтальній - сума опорів у тому порядку, якому вони розміщені в контурі.

Із діаграми можна визначити :

- 1) Напрямок і значення струму в резисторі; Оскільки в даному контурі протікає один струм, то відрізки IR діаграми мають однаковий кут нахилу. Тангенс кута нахилу відрізка, що зображає зміну потенціалу на резисторі, пропорційний струму на резисторі ($i = \frac{m_U}{m_R} \operatorname{tg} \alpha$).
- 2) Напругу між будь-якими точками кола; на діаграмі показана напруга U_{ab} між точками a, b .

1.6 Методи аналізу електричних кіл.

1. Метод рівнянь Кірхгофа.

В задачах аналізу потрібно визначити струми і напруги віток за відомими параметрами джерел, резисторів і конфігурації кола.

Якщо електричне коло має n_g віток і $n_{\text{вз}}$ вузлів, то за першим і другим законами Кірхгофа для такого кола можна скласти відповідно $(n_{\text{вз}} - 1)$ і $(n_g - n_{\text{вз}} + 1)$, а всього n_g незалежних рівнянь, в яких буде $2n_g$ невідомих струмів і напруг віток. Використовуючи закон Ома, одержуємо ще n_g рівнянь, які зв'язують напруги і струми віток між собою.

Отже загалом будемо мати $2n_g$ рівнянь з $2n_g$ невідомими струмами і напругами. Загальну кількість сумісно розв'язуваних рівнянь легко зменшити до n_g , виразивши всі струми через напруги віток, або всі напруги через струми віток. Тоді одержуємо n_g рівнянь з n_g невідомими лише струмами, або лише напругами віток. Найчастіше виражають напруги віток через струми, відразу записуючи рівняння за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів у такій формі, щоб у лівій частині рівняння фігурували напруги на резистивних елементах віток у вигляді $\pm R_k I_k$, а у правій частині фігурували ЕРС віток.

Значно складніші зворотні задачі синтезу, в яких, наприклад, відомі струми і напруги на деяких ділянках кола, а потрібно знайти конфігурацію кола і знайти параметри всіх елементів.

Алгоритм розрахунку електричного кола методом рівнянь Кірхгофа.

1. Визначаємо кількість вузлів $n_{\text{вз}}$ і віток n_g , довільно вибираємо напрям струму у вітках і складаємо $n_{\text{вз}} - 1$ рівнянь за першим законом Кірхгофа.
2. Вибираємо незалежні контури та довільно задаємо напрям їх обходу, бажано однаково, наприклад, (за годинниковою стрілкою). Складаємо для кожного з $n = n_g - n_{\text{вз}} + 1$ незалежних контурів рівняння за другим

$$\text{законом Кірхгофа у вигляді } \sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^m E_k$$

3. Розв'язок системи рівнянь дає невідомі струми.

4. Перевіряємо правильність розрахунку за балансом потужностей.

Очевидно, що потужності, які генеруються джерелами енергії, повинні повністю споживатися навантаженнями (резисторами). Тобто в електричному колі виконується *баланс потужностей*. Це наслідок закону збереження енергії:

$$\sum P_{дж} = \sum P_{сп}$$

$\underbrace{\pm \sum E_k I_k}_{\text{Потужність джерел}} \quad \underbrace{\pm \sum U_k J_k}_{\text{Потужність джерел}} = \underbrace{\sum I_k^2 R_k}_1$
$\underbrace{\text{напруги.}} \quad \underbrace{\text{струму.}} \quad \underbrace{\text{Потужність споживачів.}}$
$\underbrace{\text{Алгебраїчна сума.}} \quad \underbrace{\text{Арифметична сума.}}$

Розглянемо коло, приведенне на Рис. 25.

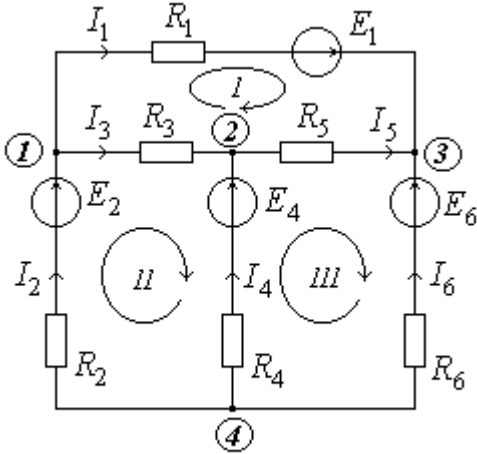


Рис. 25

У колі вузлів $n_{вз} = 4$, віток $n_в = 6$. Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа $n_{вз} - 1 = 3$

$$1. I_2 - I_1 - I_3 = 0;$$

$$2. I_3 + I_4 - I_5 = 0;$$

$$3. I_1 + I_5 + I_6 = 0.$$

Кількість незалежних контурів:

$$n = n_в - n_{вз} + 1 = 3.$$

Виділяємо прості контури (вічка) і орієнтуємо напрями їх обходу за годинниковою стрілкою.

$$I. I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = E_1;$$

$$II. I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_2 - E_4;$$

$$III. I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_6 R_6 = E_4 - E_6.$$

Одержана система із шести рівнянь із шістьма невідомими струмами.

У колі (Рис. 26) вузлів $n_{вз} = 5$, віток $n_в = 8$. У вітці 8 струм відомий $I_8 = J$.

Отже, загальна кількість віток з невідомими струмами дорівнює $n_в = 7$.

Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа $n_{вз} - 1 = 4$.

$$1. I_2 + I_5 + I_7 = 0; \quad 3. I_1 - I_5 - I_6 = 0;$$

$$2. I_3 - I_7 - J = 0; \quad 4. I_4 - I_3 + I_6 = 0.$$

Необхідна кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа:

$$n = n_g - n_{e3} - 1 = 7 - 5 + 1 = 3,$$

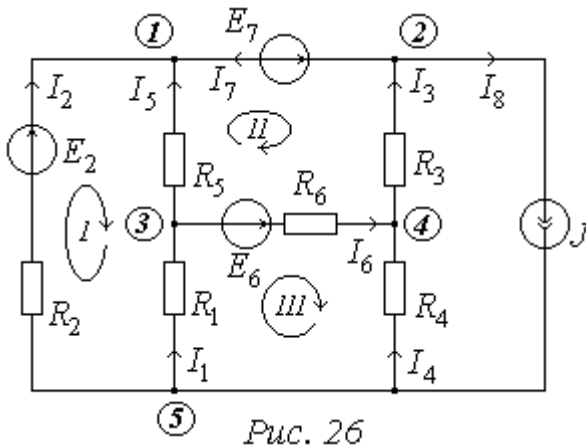


Рис. 26

Складаємо ці рівняння для трьох незалежних простих контурів, позначених на Рис. 26 римськими цифрами.

$$\text{I. } I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_1 R_1 = E_2,$$

$$\text{II. } I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_6 R_6 = E_7 - E_6,$$

$$\text{III. } I_1 R_1 + I_6 R_6 - I_4 R_4 = E_6.$$

Складаємо рівняння балансу потужностей для кола на Рис. 26.

$$E_2 I_2 - E_7 I_7 + E_6 I_6 + J U_{52} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2.$$

$$\text{де: } U_{52} = R_4 I_4 + R_3 I_3.$$

2. Метод контурних струмів.

Метод базується на другому законі Кірхгофа і законі Ома. При аналізі кола вважають, що в кожному незалежному контурі протікає свій контурний струм. Рівняння для контурних струмів складають за другим законом Кірхгофа. Кількість рівнянь дорівнює кількості незалежних контурів. На Рис. 27 зображено коло із двома незалежними контурами. I_1, I_2, I_3 - струми у вітках кола, I_{11}, I_{22} - контурні струми. Очевидно, струми у вітках, через які проходить один контурний струм, дорівнюють цим контурним струмам: $I_1 = I_{11}$; $I_3 = I_{22}$. У вітках, через які проходять декілька контурних струмів, струми дорівнюють алгебраїчній сумі контурних струмів: $I_2 = I_{11} - I_{22}$.

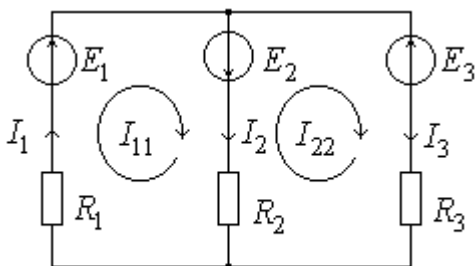


Рис. 27

За другим законом Кірхгофа:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 + E_2;$$

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 = -E_2 - E_3.$$

Виражаємо струми у вітках через контурні струми:

$$I_{11} R_1 + (I_{11} - I_{22}) R_2 = E_1 + E_2;$$

$$-(I_{11} - I_{22}) R_2 + I_{22} R_3 = -E_2 - E_3.$$

або:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22} R_2 = E_1 + E_2; \\ -I_{11} R_2 + I_{22}(R_2 + R_3) = -E_2 - E_3. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$R_{11} = R_1 + R_2$ - власний опір першого контура, це сума опорів віток, що належать першому контуру.

$R_{22} = R_2 + R_3$ - власний опір другого контура, це сума опорів віток, що належать другому контуру.

$R_{12} = R_{21} = -R_2$ - спільний (взаємний) опір першого та другого контурів, це сума опорів віток, що належать одночасно першому і другому контурам.

$E_{11} = E_1 + E_2$ - контурна ЕРС першого контура.

$E_{22} = -E_2 - E_3$ - контурна ЕРС другого контура.

Увага! ЕРС, які співпадають із вибраним напрямом контурного струму входять у контурну ЕРС зі знаком «плюс». Рекомендується контурні струми спрямовувати однаково, наприклад, за годинниковою стрілкою, тоді в рівняннях всі взаємні опори фігурують зі знаком мінус (якщо вибрані елементарні незалежні контури у планарному колі).

У загальному вигляді рівняння, складені за методом контурних струмів, для будь-якого двоконтурного кола виглядають так:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}. \end{cases}$$

Аналогічно записується система рівнянь для триконтурної схеми:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22}; \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}. \end{cases} \text{ або у вигляді матриці: } [R] \cdot [I] = [E]$$

$$\text{Де: } [R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}; \quad [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}; \quad [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи систему рівнянь будь-яким способом, наприклад, за правилом Крамера, одержуємо контурні струми:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$\text{де: } \Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix}.$$

Контурні струми можна виразити через контурні ЕРС і алгебраїчні доповнення головного визначника системи рівнянь:

$$I_{11} = E_{11} \frac{\begin{bmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}{\Delta} - E_{22} \frac{\begin{bmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}}{\Delta} + E_{33} \frac{\begin{bmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{22} & R_{23} \end{bmatrix}}{\Delta}.$$

або: $I_{11} = E_{11} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{13}}{\Delta}.$

де: Δ – головний визначник системи, $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ – алгебраїчні доповнення.
У загальному вигляді для n – контурного кола -

$$\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + \dots + I_{nn}R_{1n} &= E_{11}; \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + \dots + I_{nn}R_{2n} &= E_{22}; \\ \dots & \\ I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + \dots + I_{nn}R_{nn} &= E_{nn}. \end{aligned}$$

будь-який контурний струм:

$$I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}.$$

Для непланарного електричного кола незалежні контури слід визначати за допомогою дерева. Наприклад, розглянемо коло на *Рис. 28, а*.

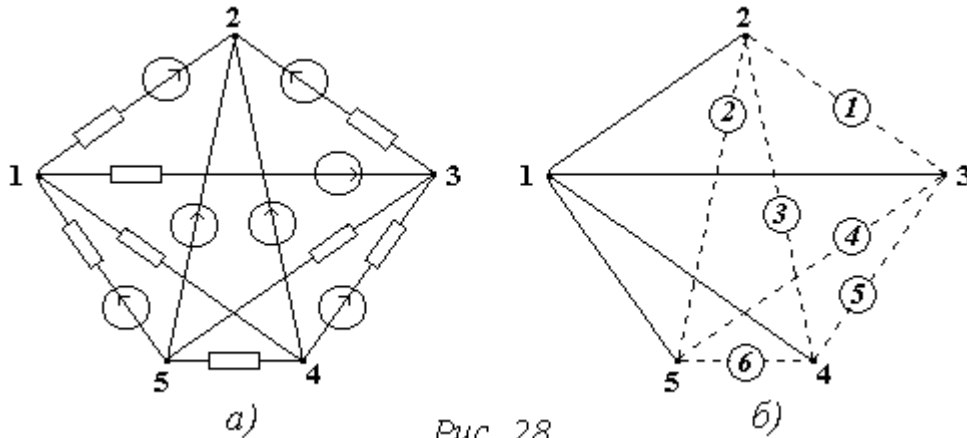


Рис. 28

У колі 5 вузлів. (*Рис. 28, б*). Дерево має чотири вітки. Кожна вітка зв'язку (пунктирні лінії, номери в кружках) разом з відповідними вітками дерева (суцільні лінії) утворює незалежний контур (6 незалежних контурів).

Алгоритм розрахунку електричного кола методом контурних струмів.

1. Вибираємо незалежні контури і орієнтуємо в них контурні струми. При цьому через вітку, в якій є джерело струму без паралельно підімкненого резистора, повинен проходити лише один контурний струм, який дорівнює струму джерела. Рівняння для такого контура не складається, тому що його струм відомий.
2. Визначаємо власні та спільні опори контурів і контурні ЕРС.

3. Будь-яким способом розв'язуємо систему рівнянь і визначаємо контурні струми.
4. За знайденими контурними струмами знаходимо струми у вітках схеми, як алгебраїчні суми контурних струмів.

Приклад 1. Розрахувати методом контурних струмів усі струми у колі (Рис. III) при таких заданих параметрах: $R_1=26(\text{Ом})$, $R_2=10(\text{Ом})$, $R_3=18(\text{Ом})$, $R_4=14(\text{Ом})$, $R_5=20(\text{Ом})$, $R_6=8(\text{Ом})$, $E_2=20(\text{В})$, $E_7=24(\text{В})$, $J=2(\text{А})$.

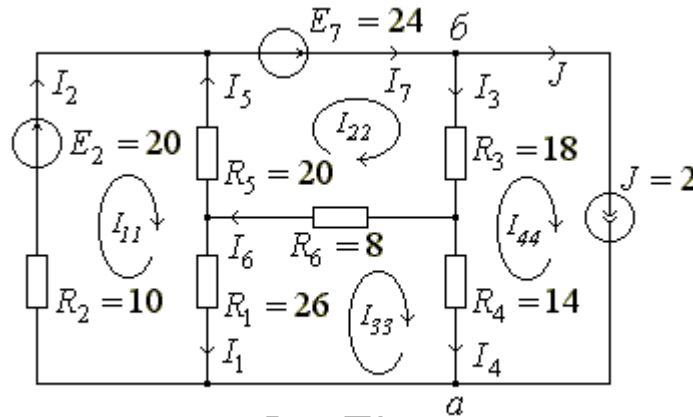


Рис. III

У колі чотири незалежних контури. За методом контурних струмів потрібно скласти три рівняння, оскільки контурний струм $I_{44} = J$ відомий.

1. $I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + I_{44}R_{14} = E_{11}$;
2. $I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} + I_{44}R_{24} = E_{22}$;
3. $I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} + I_{44}R_{34} = E_{33}$.

Власні опори контурів:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5 = 26 + 10 + 20 = 56(\text{Ом}); \quad R_{22} = R_5 + R_3 + R_6 = 20 + 18 + 8 = 46(\text{Ом});$$

$$R_{33} = R_1 + R_6 + R_4 = 8 + 14 + 26 = 48(\text{Ом}).$$

Взаємні опори у даному випадку – від'ємні:

$$R_{12} = R_{21} = -R_5 = -20(\text{Ом}); \quad R_{14} = 0; \quad R_{13} = R_{31} = -R_1 = -26(\text{Ом}); \quad R_{24} = -R_3 = -18(\text{Ом});$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_6 = -8(\text{Ом}); \quad R_{34} = -R_4 = -14(\text{Ом}).$$

Контурні ЕРС:

$$E_{11} = E_2 = 20(\text{В}); \quad E_{22} = E_7 = 24(\text{В}); \quad E_{33} = 0.$$

Підставляємо ці значення у початкову систему рівнянь

$$56I_{11} - 20I_{22} - 26I_{33} = 20; \quad 56I_{11} - 20I_{22} - 26I_{33} = 20;$$

$$-20I_{11} + 46I_{22} - 8I_{33} - 18 \cdot 2 = 24; \quad \text{після спрощення: } -20I_{11} + 46I_{22} - 8I_{33} = 60;$$

$$-26I_{11} - 8I_{22} + 48I_{33} - 14 \cdot 2 = 0. \quad -26I_{11} - 8I_{22} + 48I_{33} = 28.$$

Розв'язуємо систему рівнянь за допомогою визначників:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 56 & -20 & -26 \\ -20 & 46 & -8 \\ -26 & -8 & 48 \end{bmatrix} = 61448; \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 20 & -20 & -26 \\ 60 & 46 & -8 \\ 28 & -8 & 48 \end{bmatrix} = 150998;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 56 & 20 & -26 \\ -20 & 60 & -8 \\ -26 & 28 & 48 \end{bmatrix} = 171184; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 56 & -20 & 20 \\ -20 & 46 & 60 \\ -26 & -8 & 28 \end{bmatrix} = 146128.$$

Знаходимо контурні струми:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{150928}{61448} = 2.456(A); \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{171184}{61448} = 2.786(A);$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{146128}{61448} = 2.378(A).$$

Всі контурні струми додатні - дійсні їх напрямки співпадають із вибраними. Для перевірки вірності розрахунків потрібно підставити знайдені контурні струми у початкові рівняння. Тотожність лівої і правої частин кожного з цих рівнянь свідчить про правильність їх розв'язку. Допустима похибка залежить від точності чисельних розрахунків і не повинна перевищувати 1%.

$$\begin{aligned} 56I_{11} - 20I_{22} - 26I_{33} &= 20; & 56 \cdot 2.456 - 20 \cdot 2.786 - 26 \cdot 2.378 &= 20; \\ -20I_{11} + 46I_{22} - 8I_{33} &= 60; & -20 \cdot 2.456 + 46 \cdot 2.786 - 8 \cdot 2.378 &= 60; \\ -26I_{11} - 8I_{22} + 48I_{33} &= 28. & -26 \cdot 2.456 - 8 \cdot 2.786 + 48 \cdot 2.378 &= 28. \end{aligned}$$

Струми віток дорівнюють алгебраїчним сумах контурних струмів, що проходять у вітках:

$$I_1 = I_{11} - I_{33} = 2.456 - 2.378 = 0.078(A); \quad I_2 = I_{11} = 2.456(A);$$

$$I_3 = I_{22} - I_{44} = 2.786 - 2 = 0.78(A); \quad I_4 = I_{33} - I_{44} = 2.378 - 2 = 0.378(A);$$

$$I_5 = I_{22} - I_{11} = 2.786 - 2.456 = 0.33(A); \quad I_6 = I_{22} - I_{33} = 2.786 - 2.378 = 0.408(A);$$

$$I_7 = I_{22} = 2.786(A).$$

У вітках із ЕРС E_2 та E_7 напрями струмів співпадають із напрямками ЕРС, тому потужності джерел напруги E_2 і E_7 додатні. Для визначення потужності джерела струму J необхідно визначити напругу $U_{a\bar{b}}$ на його полюсах:

$$U_{a\bar{b}} = -I_4 R_4 - I_3 R_3 = -0.378 \cdot 14 - 0.786 \cdot 18 = -19.44 (B).$$

Перевірка вірності розв'язку за балансом потужностей.

$$P_{дж} = P_{сп}$$

$$\begin{aligned} U_{a\bar{b}} J + E_2 I_2 + E_7 I_7 &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6; \\ -19.44 \cdot 2 + 20 \cdot 2.456 + 24 \cdot 2.786 &= \\ &= 0.078^2 \cdot 26 + 2.456^2 \cdot 10 + 0.786^2 \cdot 18 + 0.378^2 \cdot 14 + 0.408^2 \cdot 8; \end{aligned}$$

$$-38.88 + 40 + 66.864 = 0.158 + 60.319 + 11.12 + 2 + 2.178 + 1.33;$$

$$77.104 \text{ (Вт)} \cong 77.108 \text{ (Вт)}.$$

Баланс потужностей зійшовся із допустимою похибкою, що означає правильність розв'язку задачі.

3. Метод вузлових потенціалів.

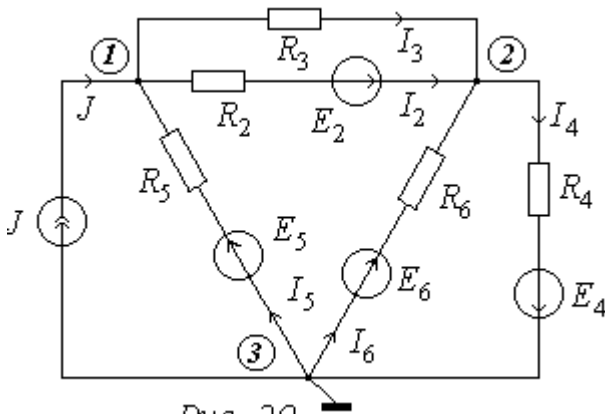


Рис. 29

Метод базується на першому законі Кірхгофа і законі Ома. Розглянемо коло (Рис. 29).

Кількість незалежних рівнянь, що складаються за першим законом Кірхгофа на одиницю менше від кількості вузлів $n_{\text{вз}}$ - 1. Один із вузлів кола можна заземлити, розподіл струмів у колі при цьому не зміниться.

У колі три вузли $n_{\text{вз}} = 3$. Потенціал вузла 3 вважаємо нульовим: $\varphi_3 = 0$. Задаємо напрямками струмів у вітках, як показано на рисунку і записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів 1, 2.

$$1. J + I_5 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$2. I_3 + I_6 + I_2 - I_4 = 0.$$

Струми у вітках виражаємо через потенціали відповідних вузлів і параметри віток за законом Ома:

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_2)G_2; I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} = (\varphi_1 - \varphi_2)G_3; I_4 = (\varphi_2 + E_4)G_4;$$

$$I_5 = (-\varphi_1 + E_5)G_5; I_6 = (-\varphi_2 + E_6)G_6.$$

де: $G_2 = \frac{1}{R_2}$; $G_3 = \frac{1}{R_3}$; $G_4 = \frac{1}{R_4}$; $G_5 = \frac{1}{R_5}$; $G_6 = \frac{1}{R_6}$ - провідності відповід-

них віток.

Підставляємо вирази для струмів у початкові рівняння:

$$1. J + (-\varphi_1 + E_5)G_5 - (\varphi_1 - \varphi_2 + E_2)G_2 - (\varphi_1 - \varphi_2)G_3 = 0;$$

$$2. (\varphi_1 - \varphi_2)G_3 + (-\varphi_2 + E_6)G_6 + (\varphi_1 - \varphi_2 + E_2)G_2 - (\varphi_2 + E_4)G_4 = 0.$$

Зводимо подібні члени.

$$1. J - \varphi_1(G_5 + G_2 + G_3) + \varphi_2(G_2 + G_3) + E_5G_5 - E_2G_2 = 0;$$

$$2. \varphi_1(G_2 + G_3) + \varphi_2(G_2 + G_3 + G_4 + G_6) + E_6G_6 + E_2G_2 - E_4G_4 = 0.$$

Відомі члени рівнянь переносимо у праву частину:

$$1. \varphi_1(G_5 + G_2 + G_3) - \varphi_2(G_2 + G_3) = J + E_5G_5 - E_2G_2;$$

$$2. -\varphi_1(G_2 + G_3) + \varphi_2(G_2 + G_3 + G_4 + G_6) = E_6G_6 + E_2G_2 - E_4G_4.$$

Приклад 2. Розрахувати методом вузлових потенціалів усі струми у колі *Рис. П2*. У колі п'ять вузлів. За методом вузлових потенціалів потрібно скласти чотири рівняння, але у колі є вітка з ЕРС (E_7), послідовно з якою не увімкнено резистор. Приймаючи за нуль потенціал вузла $\varphi_5 = 0$, одержимо $\varphi_4 = E_7 = 24$ (В). Тому кількість рівнянь зменшується до трьох:

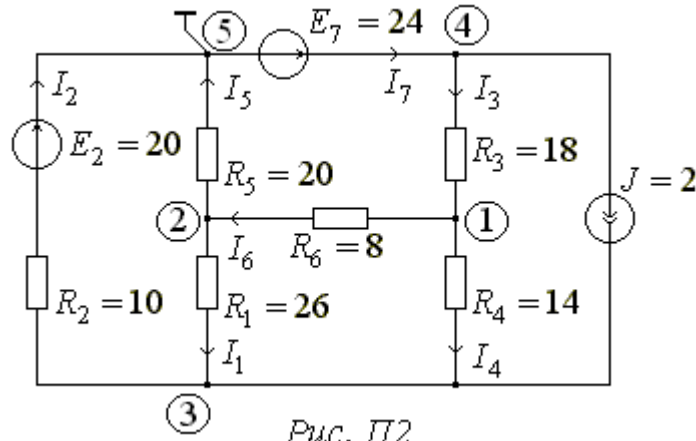


Рис. П2

1. $\varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} - \varphi_4 G_{14} = J_{11}$;
2. $-\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} - \varphi_4 G_{24} = J_{22}$;
3. $-\varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} + \varphi_3 G_{33} - \varphi_4 G_{34} = J_{33}$.

Виражаючи власні і взаємні провідності і вузлові струми через задані параметри кола, одержимо:

1. $\varphi_1 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_6} - \varphi_3 \frac{1}{R_4} - E_7 \frac{1}{R_3} = 0$;
2. $-\varphi_1 \frac{1}{R_6} + \varphi_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_1} - E_7 \cdot 0 = 0$;
3. $-\varphi_1 \frac{1}{R_4} - \varphi_2 \frac{1}{R_1} + \varphi_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - E_7 \cdot 0 = -\frac{E_2}{R_2} + J$.

1. $\varphi_1 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8} \right) - \varphi_2 \frac{1}{8} - \varphi_3 \frac{1}{14} - 24 \cdot \frac{1}{18} = 0$;
2. $-\varphi_1 \frac{1}{8} + \varphi_2 \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8} \right) - \varphi_3 \frac{1}{26} - 24 \cdot 0 = 0$;
3. $-\varphi_1 \frac{1}{14} - \varphi_2 \frac{1}{26} + \varphi_3 \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} \right) - 24 \cdot 0 = -\frac{20}{10} + 2$.
 1. $\varphi_1 0.252 - \varphi_2 0.125 - \varphi_3 0.071 = 1.333$;
 2. $-\varphi_1 0.125 + \varphi_2 0.213 - \varphi_3 0.039 = 0$;
 3. $-\varphi_1 0.071 - \varphi_2 0.039 + \varphi_3 0.210 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо потенціали вузлів:

$$\varphi_1 = 9.85(\text{В}), \quad \varphi_2 = 6.59(\text{В}), \quad \varphi_3 = 4.56(\text{В}).$$

За законом Ома знаходимо струми у вітках кола.

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1} = \frac{6.59 - 4.56}{26} = 0.078(A), \quad I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_0 + E_7}{R_2} = \frac{4.56 - 0 + 20}{10} = 2.456(A),$$

$$I_3 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_3} = \frac{24 - 9.85}{18} = 0.786(A), \quad I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} = \frac{9.85 - 4.56}{14} = 0.378(A),$$

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_5} = \frac{6.59 - 0}{20} = 0.33(A), \quad I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_6} = \frac{9.85 - 4.56}{8} = 0.408(A).$$

Струм I_7 знаходиться за першим законом Кірхгофа

$$I_7 = I_2 + I_5 = 2.456 + 0.33 = 2.786(A).$$

Знайдені струми такі ж, як і при розрахунку методом контурних струмів.

Еквівалентні перетворення електричних кіл.

У багатьох випадках вдається значно спростити розрахунок кола, виконавши еквівалентні перетворення окремих його частин. Еквівалентність перетворення полягає в тому, що струми і напруги тих частин кола, які не перетворювались, повинні залишитись такими ж, як і до перетворення.

Деякі еквівалентні перетворення були розглянуті у розділі 1.4. Розглянемо ще декілька прикладів.

а) Паралельне з'єднання віток з джерелами ЕРС і опорами (Рис. 30, а).

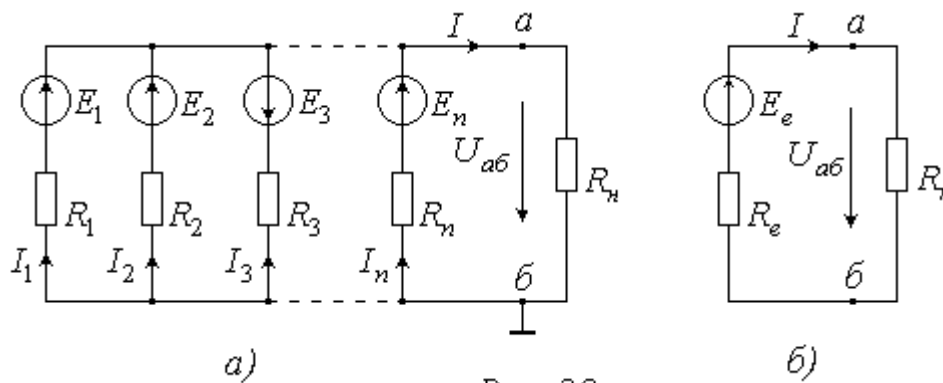


Рис. 30

Згідно з першим законом Кірхгофа струм I в колі (Рис. 30, а):

$$\begin{aligned} 1. \quad I &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = \\ &= (E_1 - U_{ab})G_1 + (E_2 - U_{ab})G_2 + (-E_3 - U_{ab})G_3 + \dots \\ &+ (E_n - U_{ab})G_n = E_1G_1 + E_2G_2 - E_3G_3 + \dots + E_nG_n - \\ &- U_{ab}(G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_k + \dots + G_n); \end{aligned}$$

$$\text{де: } G_k = \frac{1}{R_k}.$$

У колі (Рис. 30, б) струм:

$$2. \quad I = (E_e - U_{ab})G_e; \quad \text{де: } G_e = \frac{1}{R_e}.$$

Оскільки умови еквівалентності для цих двох схем виконуються при будь-якому струмі I і напрузі U_{ab} , то прирівнявши праві частини рівнянь 1, 2 маємо:

$$U_{ab}(G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n) = U_{ab}G_e;$$

$$E_1G_1 + E_2G_2 - E_3G_3 + \dots + E_nG_n = E_eG_e;$$

звідки:

$$E_e = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - E_3 G_3 + \dots + E_n G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}; \quad G_e = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n;$$

$$R_e = \frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}.$$

При визначенні еквівалентної ЕРС E_e зі знаком «+» записуються ті ЕРС, які направлені до того ж вузла, що й еквівалентна ЕРС E_e . Всі інші ЕРС записуються зі знаком «-».

б) Перетворення з'єднання «трикутник» в еквівалентне з'єднання «зірка» і навпаки.

З'єднання трьох опорів, показані на *Рис.31, а, б* називають відповідно «трикутник» і «зірка».

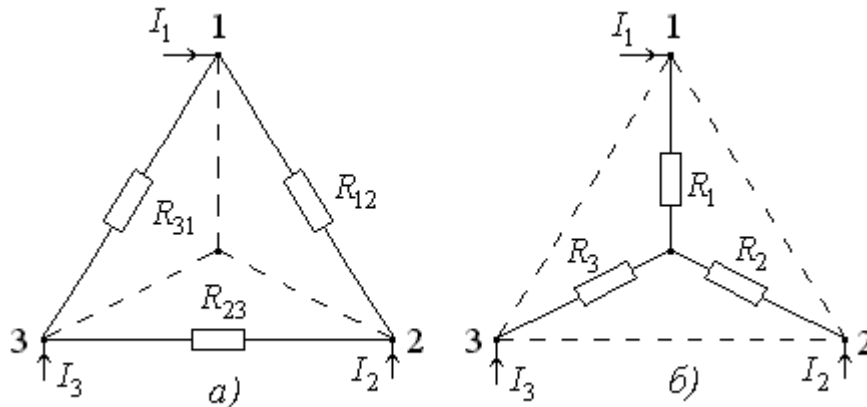


Рис. 31

У вузлах 1, 2, 3 трикутник з опорами R_{12}, R_{23}, R_{31} і зірка (R_1, R_2, R_3) - з'єднуються з рештою кола, яка на рисунку не показана. За відомими опорами трикутника (R_{12}, R_{23}, R_{31}) розраховуються опори еквівалентної зірки (R_1, R_2, R_3):

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

За відомими опорами зірки (R_1, R_2, R_3) розраховуються еквівалентні опори трикутника (R_{12}, R_{23}, R_{31}).

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

Студентам пропонується самостійно вивести ці формули, користуючись описаними раніше методами розрахунку електричних кіл.

Корисність перетворення трикутника у зірку можна пояснити, наприклад, розглядаючи коло (*Рис. 32, а*) (пунктиром обведений трикутник, який буде перетворюватись на зірку). На *Рис. 32, б* показана те ж коло після перетворення. Розрахунок струмів у цьому колі значно простіший (метод двох вузлів) ніж розрахунок струмів у колі (*Рис. 32, а*).

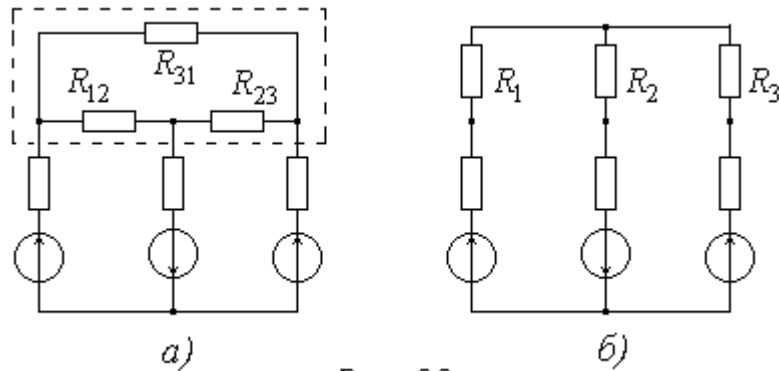


Рис. 32

У корисності перетворення зірки у трикутник можна переконатись на прикладі кола (Рис. 33, а) (пунктиром обведена зірка, яка буде перетворюватись у трикутник). На Рис. 33, б показане те ж коло після перетворення. Це коло зводиться до послідовно-паралельного з'єднання опорів.

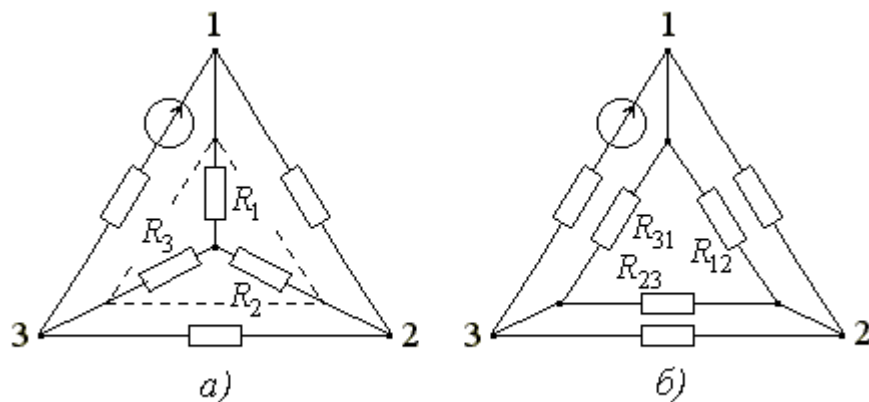


Рис. 33

в) Винесення ідеального джерела ЕРС за вузол.

Самостійно довести, що струми I, I_1, I_2 не змінюються при переході від кола Рис. 34, а до кола Рис. 34, б.

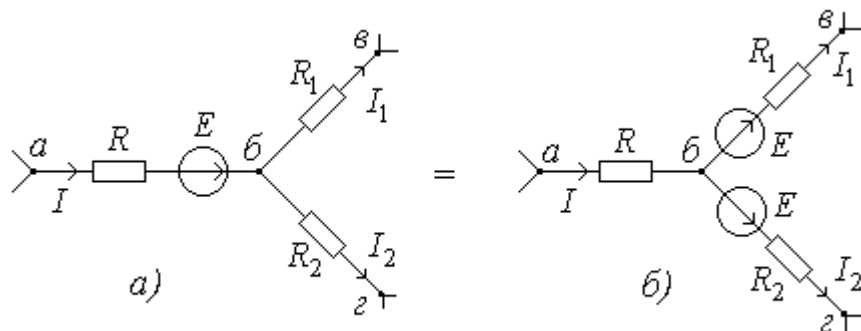


Рис. 34

г) Внесення ідеального джерела струму в контур.

Легко показати, що кола на Рис. 35, Рис. 36, а, б еквівалентні у розумінні однаковості напруг між вузлами 1, 2, 3, 4, 5.

Таким чином відбувається внесення ідеального джерела струму в контур, а далі і спрощення схеми. Наприклад, вітки з джерелами струму перетворюють на еквівалентні вітки з джерелами напруги (Рис. 37, а, б).

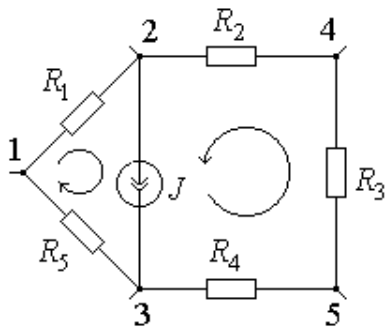
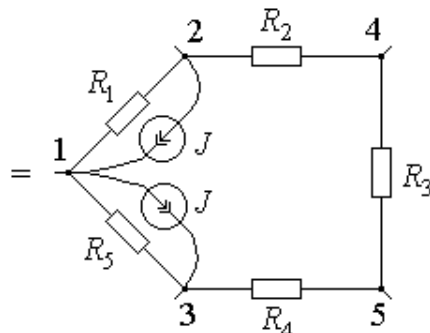
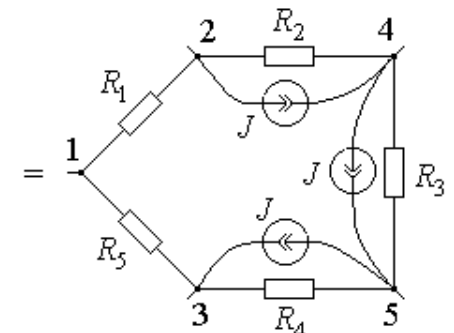


Рис. 35

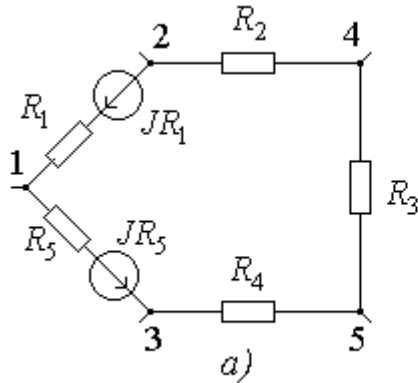


а)



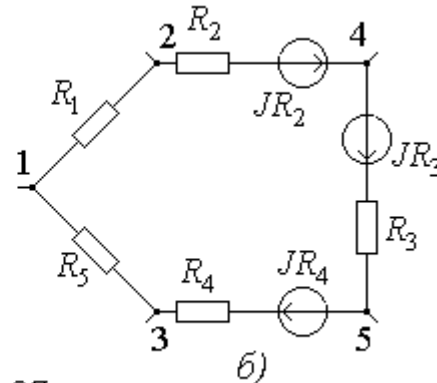
б)

Рис. 36



а)

Рис. 37



б)

4. Метод накладання дії джерел енергії.

Розв'яжемо рівняння, складені за методом контурних струмів відносно струму k -вітки, що входить тільки в k -контур (хорда, вітка зв'язку).

$$I_k = I_{kk} = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta},$$

де Δ - головний визначник системи, Δ_{kn} - відповідне алгебраїчне доповнення.

$\frac{\Delta_{kn}}{\Delta} = G_{kn}$ - має розмірність провідності (Сім), а кожна складова $E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$

являє собою струм, створений у k -вітці контурною ЕРС E_{nn} . Наприклад, $E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta}$

- складова струму в k -вітці створена, контурною ЕРС E_{11} .

Кожну контурну ЕРС можна виразити через ЕРС віток E_1, E_2, \dots, E_n , згрупувати коефіцієнти при цих ЕРС і одержати вираз такого вигляду:

$$I_k = E_1 G_{k1} + E_2 G_{k2} + \dots + E_n G_{kn} \quad (4)$$

Це рівняння виражає принцип накладання дії джерел енергії:

струм у k -вітці дорівнює алгебраїчній сумі струмів, створених у цій вітці окремо кожним джерелом кола.

Принцип дійсний для всіх лінійних електричних кіл. Якщо в схемі діє n джерел, то струм у кожній вітці буде мати n складових (часткових струмів).

Алгоритм розрахунку кола методом накладання дії джерел енергії.

1. Складне коло розкладаємо за кількістю джерел на n простих кіл, в яких діє тільки одне джерело.
2. У кожному з простих кіл розраховуємо часткові струми, викликані дією єдиного джерела, в усіх вітках.
3. Результуючий струм у кожній вітці дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів, створених у цій вітці кожним джерелом окремо.

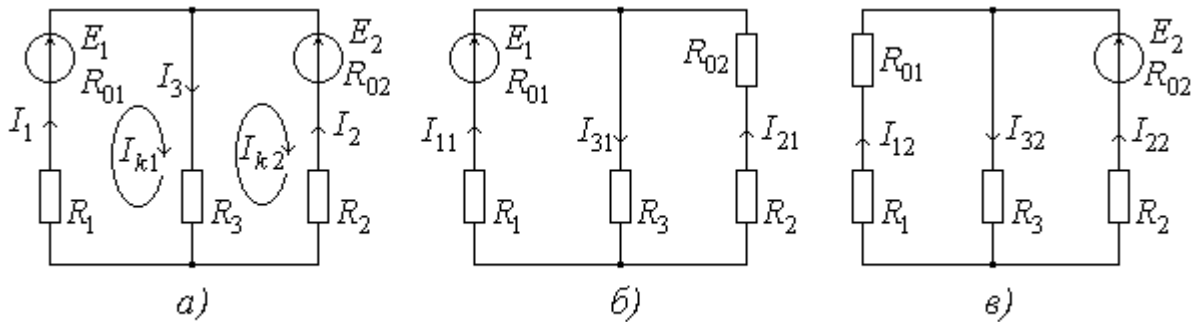


Рис. 38

На Рис.38, а зображена схема електричного кола, яке має три вітки і дві ЕРС E_1, E_2 з внутрішніми опорами R_{01}, R_{02} . Складаємо рівняння за методом контурних струмів:

$$\begin{aligned} I_{k1}(R_1 + R_{01} + R_3) - I_{k2}R_3 &= E_1; \\ -I_{k1}R_3 - I_{k2}(R_2 + R_{02} + R_3) &= -E_2. \end{aligned}$$

Застосовуючи визначники, розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо контурні струми:

$$\Delta = \begin{bmatrix} R_1 + R_{01} + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_{02} + R_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} E_1 & -R_3 \\ -E_2 & R_2 + R_{02} + R_3 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} R_1 + R_{01} + R_3 & E_1 \\ -R_3 & -E_2 \end{bmatrix}.$$

Звідки знаходимо контурні струми:

$$I_1 = I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = E_1 \underbrace{\frac{R_2 + R_{02} + R_3}{\Delta}}_{G_{11}} - E_2 \underbrace{\frac{R_3}{\Delta}}_{G_{12}} = E_1 G_{11} + E_2 G_{12} = I_{11} + I_{12},$$

$$I_2 = -I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -E_1 \underbrace{\frac{R_3}{\Delta}}_{G_{21}} + E_2 \underbrace{\frac{R_1 + R_{01} + R_3}{\Delta}}_{G_{22}} = E_1 G_{21} + E_2 G_{22} = I_{21} + I_{22}.$$

Тут $G_{11} = \frac{I_{11}}{E_1} = \frac{R_2 + R_{02} + R_3}{\Delta}$ – вхідна провідність вітки 1, чисельно дорівнює частковому струму у вітці 1, який виникає від дії ЕРС $E_1 = 1$ за умови

коли інші джерела відсутні.

$$G_{22} = \frac{I_{22}}{E_2} = \frac{R_1 + R_{10} + R_3}{\Delta} \text{ — те ж саме для вітки 2.}$$

$$G_{12} = \frac{I_{12}}{E_2} = -\frac{R_3}{\Delta} \text{ — взаємна (передавальна) провідність віток 1 і 2, чисельно}$$

дорівнює частковому струму у вітці 1, який виникає від дії ЕРС $E_2 = 1$ і відсутності джерел в інших вітках.

$$G_{21} = \frac{I_{21}}{E_1} = -\frac{R_3}{\Delta} \text{ — взаємна (передавальна) провідність віток 2 і 1.}$$

У загальному випадку, коли коло має n віток, вхідна провідність вітки m (подвійний індекс m):

$$G_{mm} = \frac{I_{mm}}{E_m}$$

Взаємна (передавальна) провідність між вітками k і m (різні індекси):

$$G_{km} = \frac{I_{km}}{E_m}, \quad G_{mk} = \frac{I_{mk}}{E_k}.$$

При однаковій взаємній орієнтації струму і ЕРС у вітках k і m , легко показати, що:

$$G_{km} = G_{mk}.$$

Якщо у вітках k і m струм і ЕРС взаємноорієнтовані не однаково, то :

$$G_{km} = -G_{mk}.$$

Саме вхідні та передавальні провідності віток є коефіцієнтами рівняння (4), що виражає принцип накладання дії джерел енергії для будь-якого складного кола з декількома ЕРС.

Використовуючи метод накладання, можна сформулювати принцип взаємності:

для будь-якого лінійного кола струм $I_k = I$ вітці k , створений ЕРС $E_m = E$, що знаходиться у вітці m , дорівнює струму $I_m = I$ у вітці m , створеному ЕРС $E_k = E$, що знаходиться у вітці k .

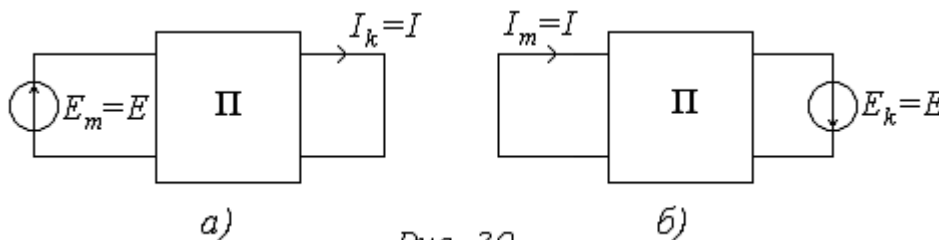


Рис. 39

У електричному колі (Рис.39, а) з одним джерелом виділено дві вітки m і k , а вся інша частина кола з пасивними елементами (опорами), виділена прямокутником (П). Якщо ЕРС діє у вітці m : $E_m = E$, то струм I_k у k -вітці:

$$I_k = EG_{km}$$

Якщо ЕРС $E_k = E$ увімкнута у k -вітку (Рис. 37,б) то струм I_m у вітці m

$$I_m = EG_{mk}.$$

Оскільки $G_{km} = G_{mk}$ то $I_k = I_m = I$ якщо у вітках k і m ЕРС і струм орієнтовані взаємно однаково.

Кола, які задовольняють принципу взаємності називаються *оборотними*.

Використовуючи принцип взаємності, можна спростувати розрахунки деяких кіл. Наприклад, у колі Рис. 40, а визначення струму I_3 значно простіше при перенесенні ЕРС E у вітку 3 (Рис. 40, б).

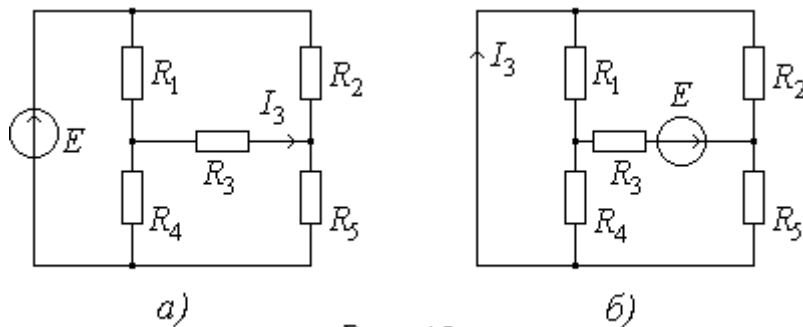


Рис. 40

Приклад 3. Розрахувати струми у колі на Рис. ПЗ методом накладання і визначити, при якому значенні ЕРС E_2 струм I_3 у третій вітці дорівнюватиме $3(A)$. Ця задача раніше розв'язана методами контурних струмів та вузлових потенціалів і дійсні струми у вітках відомі, то ж скористуємося ними для перевірки розрахунку методом накладання.

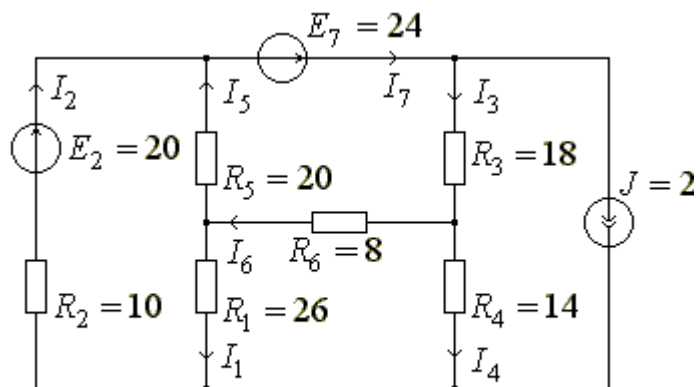


Рис. ПЗ

Задаємо напрями струмів у вітках.

За кількістю джерел (дві ЕРС і одне джерело струму) коло розкладається на три прості (часткові) кола, в яких діє тільки одне джерело. У часткових колах видалені джерела замінюються внутрішніми опорами. Внутрішній опір ідеального джерела ЕРС дорівнює нулю - *закоротка*, ідеального джерела струму - нескінченності - *розрив*. Будь-яким методом розраховуємо струми у вітках часткової схеми.

Г) Розрахунок часткового кола з джерелом E_2 . ($E_7 = 0, J = 0, \text{Рис. ПЗ.1, а}$).

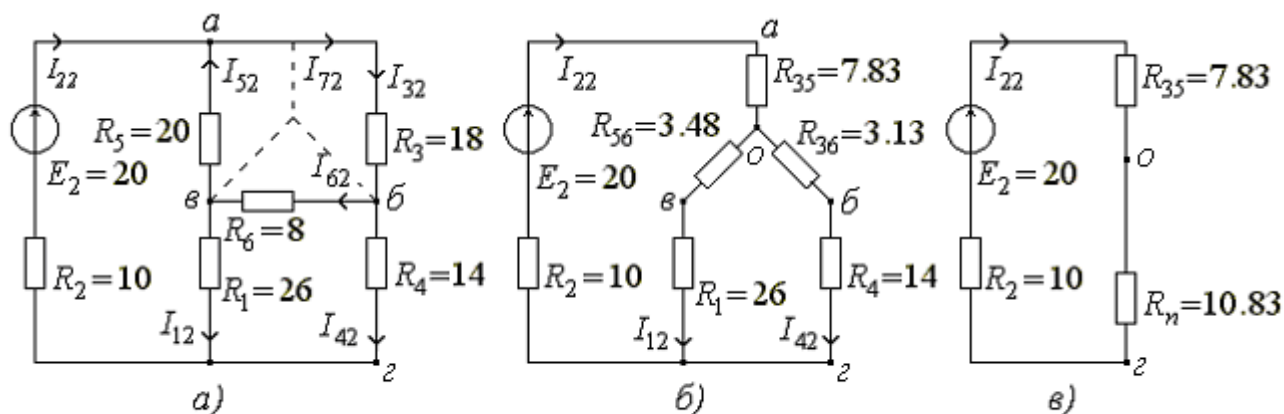


Рис. ПЗ.1

Розрахунок проводимо за допомогою поступового згортання кола до елементарного, і поетапного знаходження струмів в усіх вітках при поверненні до початкового кола.

1. Перетворюємо трикутник із опорів R_3, R_5, R_6 в зірку (показано пунктиром на Рис. ПЗ.1, а) з опорами R_{35}, R_{36}, R_{56} (Рис. ПЗ.1, б).

$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{18 \cdot 20}{18 + 20 + 8} = 7.83(\text{Ом}),$$

$$R_{36} = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{18 \cdot 8}{18 + 20 + 8} = 3.13(\text{Ом}),$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 8}{18 + 20 + 8} = 3.48(\text{Ом}).$$

2. Коло при цьому значно спростилося, дві вітки з послідовно з'єднаними опорами R_1, R_{56} , і R_4, R_{36} між собою з'єднані паралельно. Еквівалентний опір паралельного з'єднання (Рис. ПЗ.1, б):

$$R_n = \frac{(R_1 + R_{56}) \cdot (R_4 + R_{36})}{R_1 + R_{36} + R_4 + R_{36}} = \frac{(26 + 3.48) \cdot (14 + 3.13)}{26 + 3.48 + 14 + 3.13} = 10.83(\text{Ом}).$$

Еквівалентний опір нерозгалуженого кола Рис. ПЗ.1, в):

$$R_e = R_2 + R_{35} + R_n = 10 + 7.83 + 10.83 = 28.66(\text{Ом}).$$

3. Струми у частковому колі позначаємо двома індексами; перший індекс – номер вітки, другий – номер джерела. Струм джерела нерозгалуженого кола, він же і струм другої вітки I_{22} початкового кола на Рис. ПЗ.1, а:

$$I_{22} = \frac{E_2}{R_e} = \frac{20}{28.66} = 0.698(\text{А}).$$

Струми у паралельних вітках (Рис. ПЗ.1, б).

$$I_{12} = \frac{I_{22} \cdot (R_4 + R_{36})}{R_1 + R_{36} + R_4 + R_{36}} = \frac{0.698 \cdot (14 + 3.13)}{26 + 3.48 + 14 + 3.13} = 0.256(A);$$

$$I_{42} = I_{22} - I_{12} = 0.698 - 0.256 = 0.44(A).$$

4. Визначаємо напруги $U_{a\bar{b}}$, $U_{\bar{b}e}$ між точками a , \bar{b} і \bar{b} , e «зірки», які є вузлами «трикутника» (Рис. ПЗ.1, б):

$$U_{a\bar{b}} = I_{22} \cdot R_{35} + I_{42} \cdot R_{36} = 0.698 \cdot 7.89 + 0.44 \cdot 3.13 = 6.89(B),$$

$$U_{\bar{b}e} = I_{12} \cdot R_{56} - I_{42} \cdot R_{36} = 0.256 \cdot 3.48 - 0.44 \cdot 3.13 = -0.486(B).$$

5. Струми у «трикутнику»:

$$I_{32} = I_{72} = \frac{U_{a\bar{b}}}{R_3} = \frac{6.89}{18} = 0.382(A), \quad I_{62} = \frac{U_{\bar{b}e}}{R_6} = \frac{-0.486}{8} = -0.061(A),$$

$$I_{52} = -I_{22} + I_{32} = -0.698 + 0.382 = -0.316(A).$$

Отже:

$$I_{12} = 0.257(A), I_{22} = 0.698(A), I_{32} = 0.382(A), I_{42} = 0.44(A), I_{52} = -0.316(A),$$

$$I_{62} = -0.061(A), I_{72} = 0.382(A).$$

Вірність розрахунків перевіряється за балансом потужностей:

$$E_2 \cdot I_{22} = I_{12}^2 \cdot R_1 + I_{22}^2 \cdot R_2 + I_{32}^2 \cdot R_3 + I_{42}^2 \cdot R_4 + I_{52}^2 \cdot R_5 + I_{62}^2 \cdot R_6.$$

$$20 \cdot 0.698 = 0.256^2 \cdot 26 + 0.698^2 \cdot 10 + 0.382^2 \cdot 18 + 0.44^2 \cdot 14 + 0.315^2 \cdot 20 + 0.061^2 \cdot 8;$$

$$13.96 (Bm) \cong 13.94 (Bm).$$

II) Розрахунок часткового кола з джерелом E_7 . ($E_2 = 0$, $J = 0$, Рис. ПЗ.2).

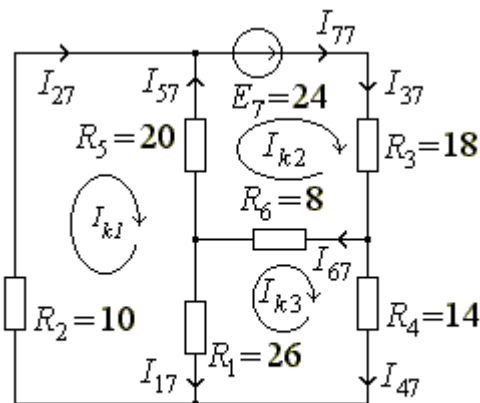


Рис. ПЗ.2

Розрахунок часткового кола проводимо методом контурних струмів, напругами яких показані на рисунку.

$$\begin{aligned}
 I_{k1}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{k2}R_5 - I_{k3}R_1 &= 0; & I_{k1}(26 + 10 + 20) - I_{k2}20 - I_{k3}26 &= 0; \\
 -I_{k1}R_5 + I_{k2}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{k3}R_6 &= E_7; & -I_{k1}20 + I_{k2}(18 + 20 + 8) - I_{k3}8 &= 24; \\
 -I_{k1}R_1 - I_{k2}R_6 + I_{k3}(R_1 + R_4 + R_6) &= 0. & -I_{k1}26 - I_{k2}8 + I_{k3}(26 + 14 + 8) &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{k1}56 - I_{k2}20 - I_{k3}26 &= 0; \\
 -I_{k1}20 + I_{k2}46 - I_{k3}8 &= 24; \\
 -I_{k1}26 - I_{k2}8 + I_{k3}48 &= 0.
 \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь дає контурні струми:

$$I_{k1} = 0.456(A), \quad I_{k2} = 0.786(A), \quad I_{k3} = 0.378(A).$$

Струми у вітках кола:

$$\begin{aligned}
 I_{17} &= I_{k1} - I_{k3} = 0.078(A). \\
 I_{27} &= I_{k1} = 0.456(A). \\
 I_{37} &= I_{77} = I_{k2} = 0.726(A). \\
 I_{47} &= I_{k3} = 0.378(A). \\
 I_{57} &= I_{k2} - I_{k1} = 0.786 - 0.456 = 0.33(A). \\
 I_{67} &= I_{k2} - I_{k3} = 0.786 - 0.378 = 0.408(A).
 \end{aligned}$$

Самостійно перевірте вірність розрахунків за балансом потужностей.

III) Розрахунок часткового кола з джерелом J . ($E_2 = 0$, $E_7 = 0$, Рис. ПЗ.3).

Розрахунок часткового кола проводиться методом вузлових потенціалів.

Приймаємо потенціал «заземленого» вузла за нульовий. Складаємо систему рівнянь для потенціалів трьох незалежних вузлів 1, 2, 3:

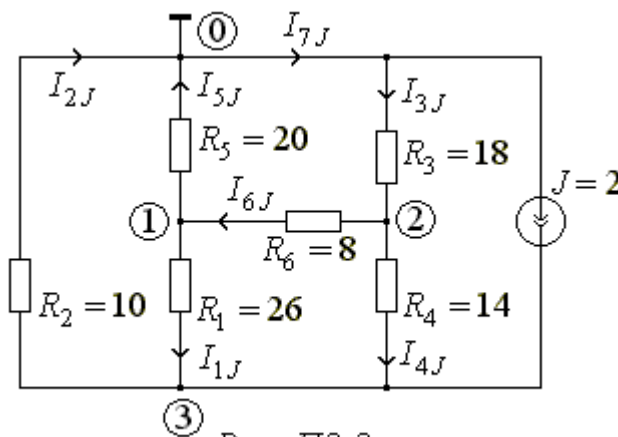


Рис. ПЗ.3

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_6} - \varphi_3 \frac{1}{R_1} = 0; \quad \varphi_1 \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8} \right) - \varphi_2 \frac{1}{8} - \varphi_3 \frac{1}{26} = 0;$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_2 \frac{1}{R_6} - \varphi_3 \frac{1}{R_1} &= 0; & -\varphi_1 \frac{1}{8} + \varphi_2 \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8} \right) - \varphi_3 \frac{1}{14} &= 0; \\ -\varphi_1 \frac{1}{R_1} - \varphi_2 \frac{1}{R_4} + \varphi_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) &= J. & -\varphi_1 \frac{1}{26} - \varphi_2 \frac{1}{14} + \varphi_3 \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} \right) &= 2. \\ \varphi_1 0.213 - \varphi_2 0.125 - \varphi_3 0.039 &= 0; \\ -\varphi_1 0.125 + \varphi_2 0.252 - \varphi_3 0.071 &= 0; \\ -\varphi_1 0.039 - \varphi_2 0.071 + \varphi_3 0.210 &= 2. \end{aligned}$$

Результат розв'язання системи рівнянь:

$$\varphi_1 = 6.353(B), \quad \varphi_2 = 6.843(B), \quad \varphi_3 = 13.022(B).$$

Струми у вітках:

$$I_{1J} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_1} = \frac{6.353 - 13.022}{26} = -0.257(A).$$

$$I_{2J} = \frac{\varphi_3}{R_2} = \frac{13.022}{10} = 1.302(A).$$

$$I_{3J} = \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{R_3} = \frac{-6.843}{18} = -0.38(A).$$

$$I_{4J} = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_4} = \frac{6.843 - 13.022}{14} = -0.441(A).$$

$$I_{5J} = \frac{\varphi_1}{R_5} = \frac{6.353}{20} = 0.318(A).$$

$$I_{6J} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_6} = \frac{6.843 - 6.353}{8} = 0.061(A).$$

$$I_{7J} = I_{2J} + I_{5J} = 1.302 + 0.318 = 1.62(A).$$

Перевірте вірність розрахунків за балансом потужностей.

IV) Накладання часткових струмів.

$$I_1 = I_{12} + I_{17} + I_{1J} = 0.257 + 0.078 - 0.257 = 0.078(A).$$

$$I_2 = I_{22} + I_{27} + I_{2J} = 0.698 + 0.456 + 1.302 = 2.456(A).$$

$$I_3 = I_{32} + I_{37} + I_{3J} = 0.382 + 0.786 - 0.38 = 0.788(A).$$

$$I_4 = I_{42} + I_{47} + I_{4J} = 0.44 + 0.378 - 0.441 = 0.378(A).$$

$$I_5 = I_{52} + I_{57} + I_{5J} = -0.315 + 0.33 + 0.318 = 0.333(A).$$

$$I_6 = I_{62} + I_{67} + I_{6J} = -0.061 + 0.408 + 0.061 = 0.408(A).$$

$$I_7 = I_{72} + I_{77} + I_{7J} = 0.382 + 0.786 + 1.62 = 2.788(A).$$

Значення струмів практично такі ж, як і розраховані методами контурних струмів і вузлових потенціалів.

Використовуючи вхідні та взаємні провідності, можна знайти залежність між струмом будь-якої вітки і будь-якою ЕРС схеми. Залежність струму третьої вітки I_3 від ЕРС E_2 : $I_3 = f(E_2)$.

$$I_3 = I_{32} + I_{37} + I_{3J} = E_2 G_{32} + 0.786 - 0.38 = E_2 \cdot 0.0191 + 0.406.$$

$$\text{Де: } G_{32} = \frac{I_{32}}{E_2} = \frac{0.382}{20} = 0.0191(\text{Сім}).$$

Тепер ЕРС E_2 , потрібна для створення струму $I_3 = 3(A)$:

$$E_2 = \frac{I_3 - 0.406}{0.0191} = \frac{3 - 0.406}{0.0191} = 135.8(B).$$

Підставляючи знайдене значення ЕРС E_2 в рівняння кола, складені за будь-яким розрахунковим методом і знаходячи струм I_3 , пересвідчуємося у правильності розрахунку.

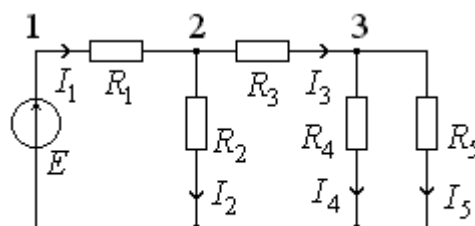
5. Метод пропорційного перерахунку.

Цей метод переважно використовується для розрахунку розгалужених кіл з одним джерелом енергії.

Ідея методу. Якщо у колі лише одне джерело (E або J), то струм будь-якої вітки пропорційний значенню ЕРС, або струму цього джерела. *Задаючись струмом (напругою) в найбільш віддаленій від джерела вітці кола, за законами Ома та Кірхгофа розраховуємо коло, знаходимо напругу U (струм I) джерела і коефіцієнт пропорційності $k = \frac{E}{U}$ ($k = \frac{J}{I}$). Перемноживши розраховані струми і напруги на коефіцієнт пропорційності k , одержуємо дійсні струми та напруги у вітках кола.*

Приклад 4. Визначити струми у колі *Рис. П4* методом пропорційного перерахунку.

Задаємося будь-яким струмом у кінцевій вітці, наприклад, $I_5' = 1(A)$ і знаходимо всі інші струми та напруги кола. Нижче приведена послідовність розрахунку.



4 *Рис. П4*

$$\begin{aligned}
 1. I'_5 &= I(A), U'_{34} = I'_5 R_5. & 2. I'_4 &= \frac{U'_{34}}{R_4}. & 3. I'_3 &= I'_4 + I'_5. & 4. U'_{23} &= I'_3 R_3. \\
 5. U'_{24} &= U'_{23} + U'_{34}. & 6. I'_2 &= \frac{U'_{24}}{R_2}. & 7. I'_1 &= I'_2 + I'_3. & 8. U'_{12} &= I'_1 R_1. \\
 9. U'_{14} &= U'_{12} + U'_{24}. & 10. k &= \frac{E}{U'_{14}}.
 \end{aligned}$$

Дійсні струми у вітках кола: $I_1 = kI'_1, I_2 = kI'_2, I_3 = kI'_3, I_4 = kI'_4, I_5 = kI'_5$. Аналогічно знаходяться дійсні напруги на елементах кола.

6. Двополюсник. Метод еквівалентного генератора.

Двополюсник – частина кола, що має два полюси, до яких можуть під'єднуватись інші елементи кола.

Пасивний двополюсник, в якому відсутні джерела енергії, можна замінити одним еквівалентним опором (Рис. 41, а).

Активний двополюсник – можна замінити еквівалентним генератором (Рис. 41, б).

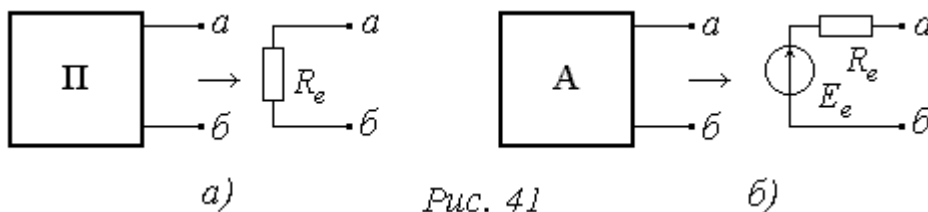


Рис. 41

Теорема про активний двополюсник.

Струм у вітці $a, б$ електричного кола не зміниться, якщо активний двополюсник (Рис. 42, а), до якого під'єднана вітка, замінити еквівалентним джерелом, ЕРС якого дорівнює напрузі розриву на полюсах активного двополюсника, а внутрішній опір дорівнює входному опору відносно полюсів $a, б$ пасивного двополюсника, одержаного із даного активного двополюсника видаленням джерел енергії (Рис. 42, б).

Доведемо теорему.

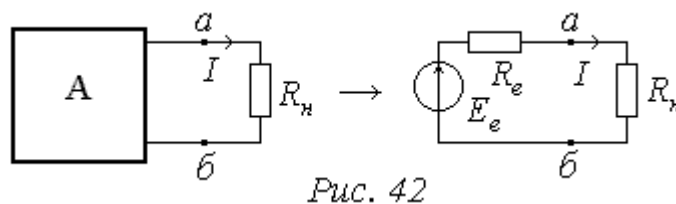


Рис. 42

1. Від'єднуємо опір навантаження R_n (режим розриву - p) (Рис. 43, а) і визначаємо напругу розриву $U_{aбp}$ активного двополюсника, яка дорівнює еквівалентній ЕРС E_e двополюсника. Якщо послідовно з навантаженням ввімкнути

зустрічно дві однакові ЕРС E_1 і E_2 (Рис. 43, б), що дорівнюють напрузі розриву, струм у вітці не зміниться.

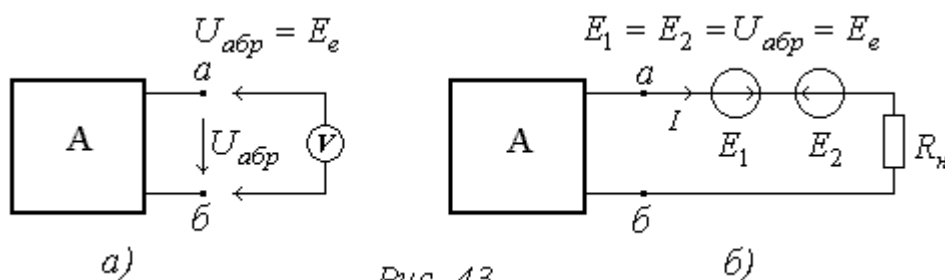


Рис. 43

2. Розраховуємо коло (Рис. 43, б) методом накладання, для цього розглянемо два часткові кола. У перше коло входять всі джерела активного двополюсника і ЕРС E_2 (Рис. 44, а), у друге - пасивний двополюсник (без джерел енергії) і ЕРС E_1 (Рис. 44, б).

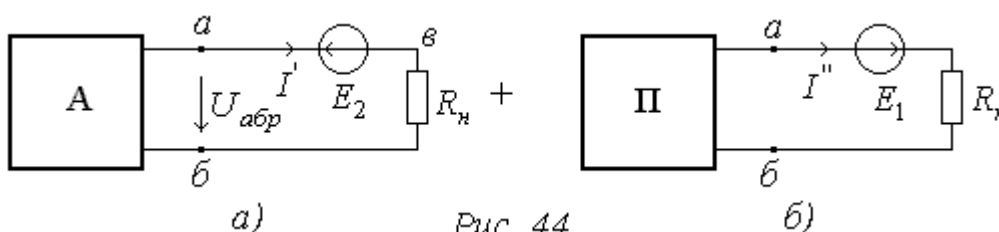


Рис. 44

Струм $I' = 0$, тому що при розриві $U_{ab} = -E_2 + U_{abp} = 0$, отже увімкнення резистора R_n не викликає появу струму. Оскільки $I = I' + I''$, то струм $I = I''$, тобто дорівнює струму у другому частковому колі (Рис. 44, б). Двополюсник можна замінити входним еквівалентним опором, при цьому коло спроститься (Рис. 45, а). ЕРС E_1 є ЕРС еквівалентного генератора E_e , а входний опір R_{ex} - внутрішнім опором еквівалентного генератора R_e (Рис. 45, б).

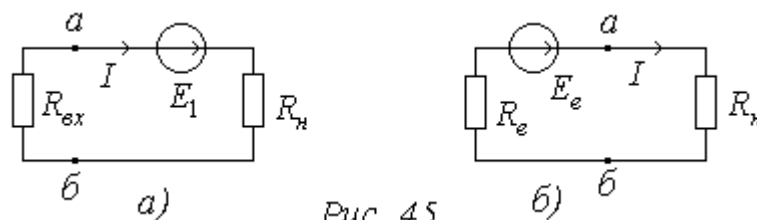


Рис. 45

$$\text{Струм у вітці} \quad I = \frac{U_{abp}}{R_{ex} + R_n} = \frac{E_e}{R_e + R_n}.$$

Алгоритм розрахунку електричного кола методом еквівалентного генератора.

1. Від'єднуємо вітку, в якій визначається струм.
2. Будь-яким із відомих методів розраховуємо коло, що залишилося (режим-розриву активного двополюсника) і визначаємо напругу U_{abp} між точками a , b , до яких була під'єднана вітка.
3. Видаляємо із кола джерела енергії, замінивши їх внутрішніми опорами, визначаємо входний опір $R_{ex} = R_e$ відносно точок a , b .

4. Визначаємо струм у вітці за формулою: $I = \frac{U_{a\bar{b}p}}{R_{\text{вх}} + R_{\text{н}}} = \frac{E_e}{R_e + R_{\text{н}}}$.

5. Якщо у вітці, струм якої розраховуємо, є джерело ЕРС (Рис. 46, а), то розрахунок ведеться за формулою:

$$I = \frac{U_p \pm E}{R_{\text{вх}} + R_{\text{н}}} = \frac{E_e \pm E}{R_e + R_{\text{н}}}$$

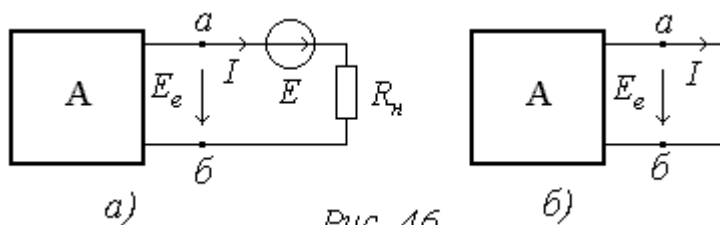


Рис. 46

6. Якщо у вітці, струм якої розраховується, відсутні опір і ЕРС (коротке замикання вітки) (Рис. 46, б) то:

$$I = \frac{U_p}{R_{\text{вх}}} = \frac{E_e}{R_e}, \quad \text{звідки:} \quad R_{\text{вх}} = \frac{U_p}{I_{\text{кз}}}$$

Приклад 5. Визначити струм I_5 у колі так званого моста (Рис. П5, а).

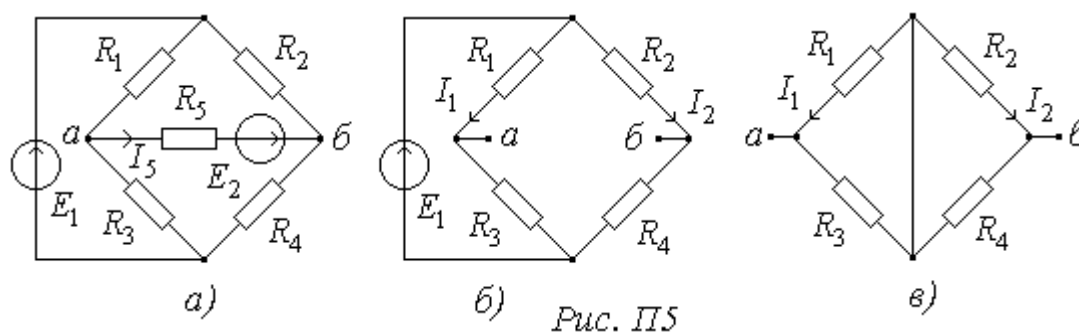


Рис. П5

1. Від'єднуємо вітку зі струмом I_5 (Рис. П5, б).
2. Розраховуємо коло, що залишилося (режим розриву активного двополосника) і визначаємо напругу $U_{a\bar{b}p}$ між точками a , b , до яких була під'єднана вітка.

$$\begin{aligned} U_{a\bar{b}p} = E_e &= -I_1 R_1 + I_2 R_2 = -\frac{E_1 R_1}{R_1 + R_3} + \frac{E_1 R_2}{R_2 + R_4} = \\ &= \frac{E_1 (R_2 (R_1 + R_3) - R_1 (R_2 + R_4))}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \end{aligned}$$

Після спрощення виразу одержуємо: $U_{a\bar{b}p} = E_e = \frac{E_1 (R_2 R_3 - R_1 R_4)}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$.

Очевидно, якщо $R_2R_3 = R_1R_4$ то $U_{a\delta p} = 0$, (мостова схема врівноважена).

3. Видаляємо із схеми E_2 , замінивши її внутрішнім опором (закоротка), визначаємо вхідний опір $R_{a\delta}$ відносно точок a , δ (Рис. П5, в). Опори R_1 і R_3 , R_2 і R_4 з'єднані паралельно, а між собою - послідовно.

$$R_{a\delta} = R_{ex} = R_e = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}$$

4. Струм I_5 визначається за формулою: $I_5 = \frac{U_{a\delta p} + E_2}{R_{ex} + R_5} = \frac{E_e + E_2}{R_e + R_5}$.

Приклад 6.

I) Розрахувати струм у вітці з ЕРС E_2 (Рис. П6, а).

II) Визначити, якою повинна бути ЕРС E_2 , щоб струм I_2 при тому ж значенні змінив свій напрям.

III) Знайти залежність між струмом I_2 у другій вітці і опором R_4 у четвертій вітці при незмінних всіх інших параметрах.

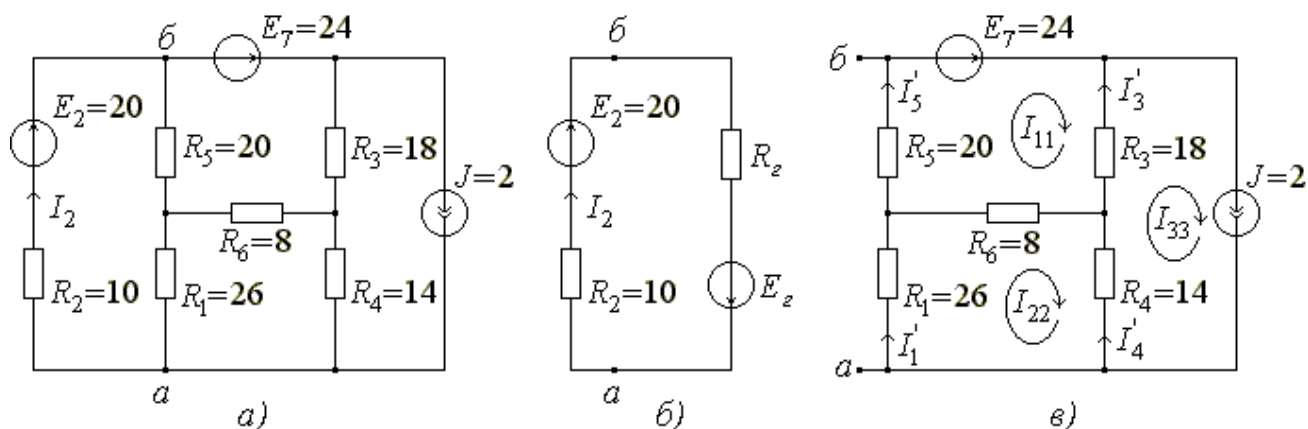


Рис. П6

I. Розраховуємо струм I_2 методом еквівалентного генератора.

1. На Рис. П6, в відімкнена друга вітка. Коло, що залишилося, розраховуємо методом контурних струмів, які показані на схемі. Струм $I_{33} = J = 2(A)$.

$$\begin{aligned} I_{11}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{22}R_6 - JR_3 &= E_7; & I_{11}(18 + 8 + 20) - I_{22}8 - 2 \cdot 18 &= 24; \\ -I_{11}R_6 + I_{22}(R_1 + R_4 + R_6) - JR_4 &= 0; & -I_{11}8 + I_{22}(26 + 14 + 8) - 2 \cdot 14 &= 0; \\ I_{11}46 - I_{22}8 &= 60; \\ -I_{11}8 + I_{22}48 &= 28. \end{aligned}$$

Результат розв'язання системи рівнянь: $I_{11} = 1.448(A)$, $I_{22} = 0.825(A)$.

Струми у вітках схеми:

$$I_1' = I_{22} = 0.825(A), \quad I_3' = J - I_{11} = 2 - 1.448 = 0.552(A),$$

$$I_4' = J - I_{22} = 2 - 0.825 = 1.175(A), \quad I_5' = I_{11} = 1.448(A).$$

Напругу $U_{a\delta p}$, що дорівнює ЕРС еквівалентного генератора E_e , для перевірки правильності розв'язку знаходимо двома незалежними шляхами.

$$U_{a\delta p} = I_1' R_1 + I_5' R_5 = 0.825 \cdot 26 + 1.448 \cdot 20 = 50.40(B).$$

Самостійно перевірте цю напругу іншим шляхом, наприклад:

$$U_{a\delta p} = I_4' R_4 + I_3' R_3 + E_7$$

2). Вхідний опір між точками a , δ , що дорівнює опору еквівалентного генератора, знаходимо видаленням з активного двополюсника джерел енергії (Рис. Пб.1, а).

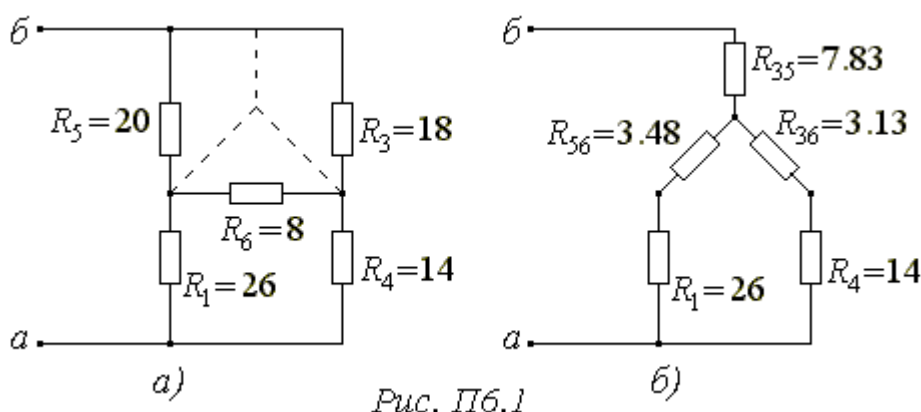


Рис. Пб.1

Для спрощення схеми «трикутник» R_3, R_5, R_6 перетворюється на «зірку» R_{35}, R_{36}, R_{56} (Рис. Пб.1, б).

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{18 \cdot 20}{18 + 20 + 8} = 7.83(Ом),$$

$$R_{36} = \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{18 \cdot 8}{18 + 20 + 8} = 3.13(Ом),$$

$$R_{56} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = \frac{20 \cdot 8}{18 + 20 + 8} = 3.48(Ом).$$

У спрощеній схемі до паралельних віток з послідовно з'єднаними опорами R_1, R_{56} і R_4, R_{36} під'єднаний послідовно опір R_{35} . Вхідний еквівалентний опір відносно точок a, δ :

$$R_{a\delta} = R_e = \frac{(R_{56} + R_1)(R_{36} + R_4)}{R_{56} + R_1 + R_{36} + R_4} + R_{35} = \frac{(3.48 + 26)(3.13 + 14)}{3.48 + 26 + 3.13 + 14} + 7.83 = 18.66(Ом).$$

3). Струм $I_2 = \frac{E_e + E_2}{R_e + R_2} = \frac{50.40 + 20}{18.66 + 10} = 2.456(A)$. Це видно із схеми ек-

вівалентного генератора (Рис. Пб, б)

Результат такий же, як і при розрахунку іншими методами.

II. Для зміни напрямку струму I_2 визначаємо нову ЕРС E_2 із останньої формули:

$$-I_2 = \frac{E_e + E_2}{R_e + R_2};$$

$$\text{звідки: } E_2 = -I_2(R_e + R_2) - E_e = -2.456(18.66 + 10) - 50.40 = -120.79(\text{В}).$$

III. В електричних колах зміна будь-якого одного параметра (ЕРС, опору резистора) викликає зміну напруг та струмів у вітках схеми. В лінійних колах при цьому залежність між напругами і струмами у вітках – лінійна, яка в загальному випадку описується функцією $y = A + Bx$.

Для визначення шуканої залежності $I_2 = f(R_4)$ спочатку визначаємо залежність між струмами I_2 та I_4 ($I_2 = f(I_4)$), а потім за методом еквівалентного генератора визначаємо залежність між струмом I_4 та R_4 ($I_4 = f(R_4)$).

Із прикладу 3 відомо, що: $I_2 = 2.456(A)$, $I_4 = 0.378(A)$. Залежність між ними виразимо рівнянням: $I_2 = A + BI_4$. Визначаємо коефіцієнти A , B , знаючи струми I_2 і I_4 для двох значень змінюваного опору R_4 .

1). При $R_4 = \infty$ - (розрив) струм $I_4 = 0$. Струм I_2 при цьому визначаємо зі схеми кола (Рис. Пб.2, а).

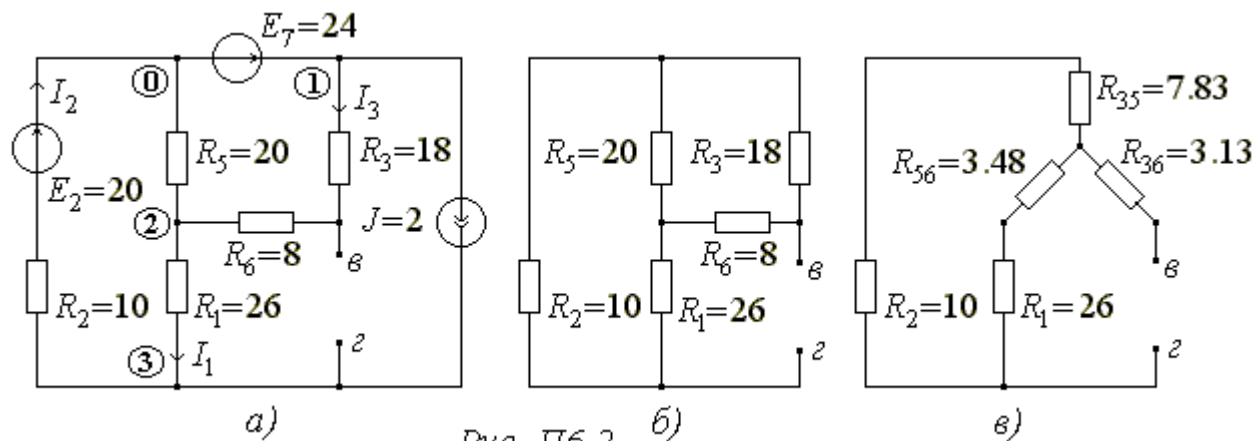


Рис. Пб.2

Цю задачу розв'яжемо методом вузлових потенціалів.

Потенціал заземленого вузла $\varphi_0 = 0$, потенціал першого вузла:

$$\varphi_1 = E_2 = 24(\text{В}).$$

Визначаються потенціали вузлів 2, 3.

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3 + R_6} + \frac{1}{R_1} \right) - \varphi_3 \frac{1}{R_1} - \varphi_1 \frac{1}{R_3 + R_6} &= 0; \\ -\varphi_2 \frac{1}{R_1} + \varphi_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= J - \frac{E_2}{R_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{18+8} + \frac{1}{26} \right) - \varphi_3 \frac{1}{26} - 24 \frac{1}{18+8} &= 0; \\ -\varphi_2 \frac{1}{26} + \varphi_3 \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{10} \right) &= 2 - \frac{20}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Або: } \quad \varphi_2 \cdot 0.127 - \varphi_3 \cdot 3.85 \cdot 10^{-2} &= 0.923; \\ -\varphi_2 \cdot 3.85 \cdot 10^{-2} + \varphi_3 \cdot 0.138 &= 0. \end{aligned}$$

Звідки: $\varphi_2 = 7.941 (В)$, $\varphi_3 = 2.206 (В)$.

Струми у вітках:

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1} = \frac{7.941 - 2.206}{26} &= 0.221(A); \quad I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3 + R_6} = \frac{24 - 7.941}{18 + 8} = 0.618(A); \\ I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_0 + E_2}{R_2} = \frac{2.206 + 20}{10} &= 2.221(A). \end{aligned}$$

Отже: $2.221 = A + B \cdot 0$. Звідки $A = 2.221$.

За відомими струмами $I_2 = 2.456(A)$, $I_4 = 0.378(A)$, знайденими у прикладі 3 при $R_4 = 14(Ом)$ визначаємо коефіцієнт B .

$$I_2 = A + BI_4; \quad 2.456 = 2.221 + B \cdot 0.378. \quad B = \frac{2.456 - 2.221}{0.378} = 0.623.$$

Залежність струму I_4 від опору R_4 знаходимо за методом еквівалентного генератора, користуючись відомими струмами у колі на *Рис. Пб.2, а*.

$$U_{e2} = E_e = I_3 R_6 + I_1 R_1 = 0.618 \cdot 8 + 0.221 \cdot 26 = 10.68(В).$$

Перевірте! Така ж напруга буде при визначенні іншим шляхом:

$$U_{e2} = E_e = -I_3 R_3 + E_7 + E_2 - I_2 R_2$$

Опір еквівалентного генератора визначаємо зі схем (*Рис.Пб.2, б, в*).

$$R_{e2} = R_e = R_{36} + \frac{(R_{35} + R_2)(R_{56} + R_1)}{R_{35} + R_2 + R_{56} + R_1} = 3.13 + \frac{(7.83 + 10)(3.48 + 26)}{7.83 + 10 + 3.48 + 26} = 14.24(Ом).$$

Тепер маємо:

$$I_2 = A + BI_4 = A + B \frac{E_e}{R_e + R_4} = 2.221 + 0.623 \frac{10.68}{14.24 + R_4} = 2.221 + \frac{6.654}{14.24 + R_4}.$$

Теорема компенсації.

У будь-якому електричному колі опір (резистор) можна замінити джерелом напруги, ЕРС якого чисельно дорівнює падінню напруги на цьому опорі і спрямована проти струму в опорі. При цьому струми і напруги в колі не зміняться.

На *Рис. 46, а* виділена вітка з опором R , в якій протікає струм I . При вми-
канні у вітку зустрічно двох будь-яких ЕРС E (*Рис. 46, б*), струм у вітці не
змінюється. Якщо $E=IR$, то потенціал точки $в$ відносно точки $а$: $\varphi_в = \varphi_а -$
 $- IR + E = \varphi_а - IR + IR = \varphi_а$, тобто точки $а$ і $в$ можна об'єднати (E і R видалити).

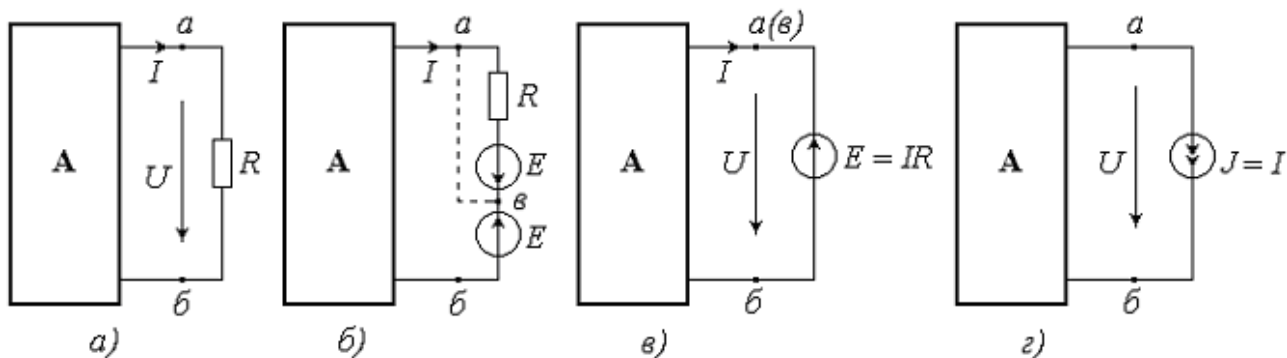


Рис. 46

Таким чином опір R (*Рис. 46, а*) замінено ЕРС E (*Рис. 46, в*), що відповідає
теоремі компенсації.

Опір R можна також замінити джерелом струму $J = \frac{U}{R} = I$ (*Рис. 46, г*) і при
цьому напруги та струми кола не зміняться.

Приклад 7. Струм у колі, схема якого зображена на *Рис. П7, а*: $I = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$.

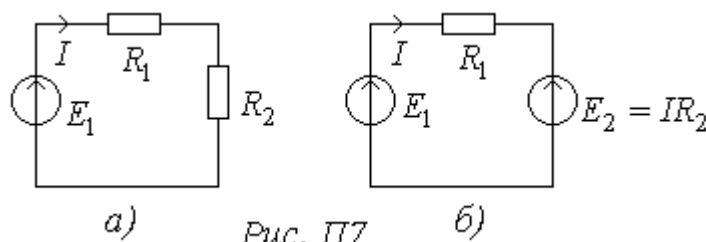


Рис. П7

Згідно з теоремою компенсації опір R_2 замінюється ЕРС $E_2 = IR_2$ (*Рис. П7,*
б). Струм у цьому випадку: $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1} = \frac{E_1 - IR_2}{R_1}$; звідки: $I = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$.

Заміна опору R_2 на $E_2 = IR_2$ не викликає зміни струму в колі.

Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.

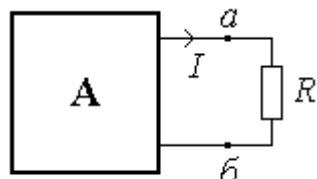


Рис. 47

Як відомо, струм у виділеній вітці (*Рис. 47*) згід-
но з методом еквівалентного генератора: $I = \frac{U_{абр}}{R_{ex} + R}$.

Потужність в опорі навантаження:

$$P = I^2 R = \frac{U_{абр}^2}{(R_{ex} + R)^2} R.$$

Для визначення опору навантаження R , при якому в ньому виділяється
максимальна потужність, потрібно дослідити функцію $P = f(R)$ на екстремум

(максимум). Максимум функції буде при мінімумі знаменника, який знайти простіше.

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{R_{\text{ex}}^2}{R} + 2R_{\text{ex}} + R \right) = -\frac{R_{\text{ex}}^2}{R^2} + 1 = 0; \quad R^2 - R_{\text{ex}}^2 = 0; \quad R = R_{\text{ex}}.$$

Звідки: $R = R_{\text{ex}}$ - умова виділення максимальної потужності.

Отже максимальна потужність у навантаженні:

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{ex}}^2}{(R_{\text{ex}} + R)^2} R = \frac{U_{\text{абр}}^2}{4R^2} R = \frac{U_{\text{абр}}^2}{4R}. \quad \boxed{P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{абр}}^2}{4R}}.$$

Потужність генератора:

$$P_2 = U_{\text{абр}} I = U_{\text{абр}} \frac{U_{\text{абр}}}{R_{\text{ex}} + R} R = \frac{U_{\text{абр}}^2 R}{R_{\text{ex}} + R}. \quad \boxed{P_2 = \frac{U_{\text{абр}}^2 R}{R_{\text{ex}} + R}}.$$

Потужність в опорі навантаження:

$$P = I^2 R = \frac{U_{\text{абр}}^2 R}{(R_{\text{ex}} + R)^2}. \quad \boxed{P = \frac{U_{\text{абр}}^2 R}{(R_{\text{ex}} + R)^2}}.$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{P}{P_2} = \frac{R(R_{\text{ex}} + R)}{(R_{\text{ex}} + R)^2} = \frac{R}{R_{\text{ex}} + R}. \quad \boxed{\eta = \frac{R}{R_{\text{ex}} + R}}.$$

Очевидно, при виділенні в навантаженні максимальної потужності $R = R_{\text{ex}}$, $\eta = 0.5$. При великих потужностях (електричні мережі), працювати з таким ККД неприпустимо, оскільки половина потужності буде передаватись до навантаження, а інша половина витратиться. Але при малих потужностях (декілька міліват), в різних пристроях радіоелектроніки і автоматики працюють з ККД $\eta = 0.5$ для того, щоб до навантаження надходила максимальна потужність.

Вибір опору навантаження R , що дорівнює вхідному опору R_{ex} активного двополюсника, називають *узгодженням навантаження*. Залежність потужності на опорі навантаження від значення цього опору $P=f(R)$ показана на *Рис. 48*.

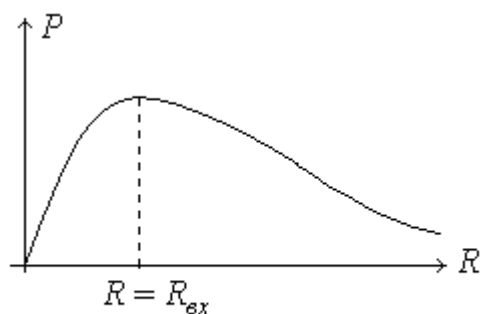


Рис. 48

Завдання на самостійну роботу.

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.

В електричному колі діють джерела наруги ЕРС E_1 і E_7 і джерело струму J . Параметри кола наведені в таблицях №1 і №2, схеми кіл наведені на *Рис. 49*.

- 1) Розрахувати струми у всіх вітках кола методом контурних струмів.
Скласти баланс потужностей.
Скласти систему рівнянь кола за законами Кірхгофа, підставити у ці рівняння розраховані значення струмів і переконатись у правильності одержаних результатів.
- 2) Розрахувати струми у всіх вітках кола методом вузлових потенціалів.
Побудувати потенціальну діаграму для замкненого контура, що проходить через обидві ЕРС.
Розрахувати показ вольтметра V .
- 3) Розрахувати струми у всіх вітках кола методом накладання дій джерел енергії:
для розрахунку часткового кола з джерелом E_1 застосувати еквівалентні перетворення, для схем з E_7 і J - будь-які інші методи.
Визначити для віток з джерелами напруги та струму вхідні та взаємні провідності, коефіцієнти передачі струму.
Розрахувати, якою повинна бути ЕРС E_1 , щоб струм у п'ятій вітці дорівнював 5 ампер.
- 4) Розрахувати струм у вітці з ЕРС E_1 методом еквівалентного генератора.
Визначити, яку ЕРС потрібно ввімкнути у першу вітку щоб струм I_1 змінив напрям і збільшився у 5 разів.
- 5) Знайти залежність між струмом у першій вітці (I_1) і опором у третій вітці (R_3) при незмінності всіх інших параметрів. Розрахувати струм I_1 при опорі $R_3 = 5(Ом)$.

- Увага!
1. Параметри елементів кола нанести на схему.
 2. Схеми та діаграми виконувати олівцем згідно з правилами технічного креслення.
 3. Всі розрахунки давати у такому порядку: формула або рівняння (в літерних позначеннях) – формула чи рівняння в числах – відповідь в одиницях виміру.



Примітка. Варіант даних для розрахунку вибрати згідно з тризначним шифром (№1, №2, №3). Перша цифра відповідає номеру колонки таблиці №1, друга - номеру колонки таблиці №2, третя - номеру схеми.

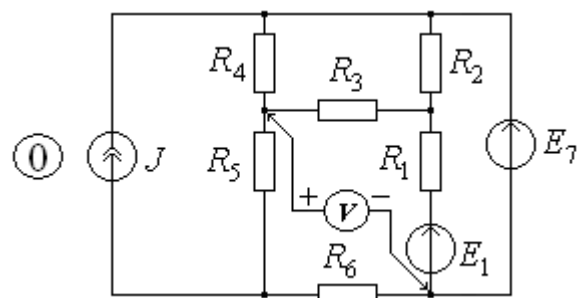
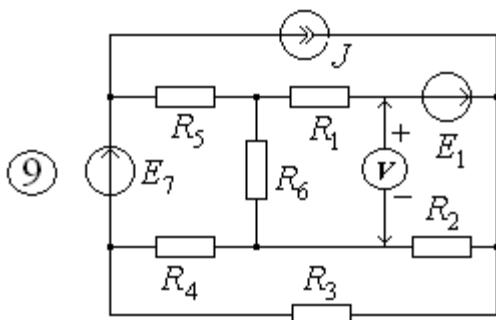
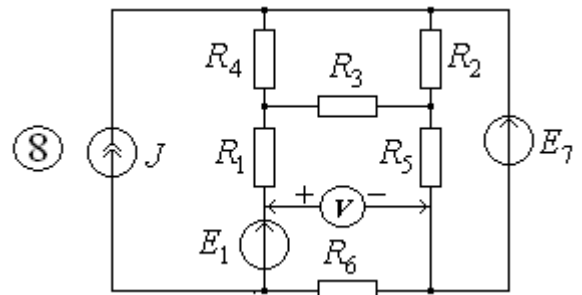
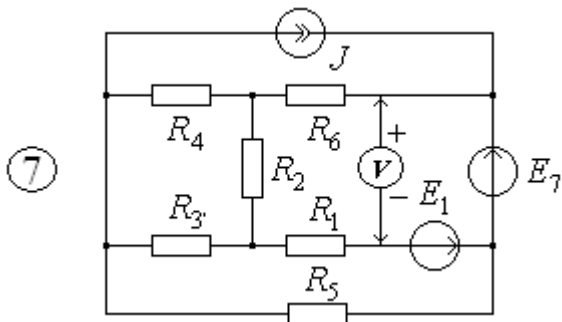
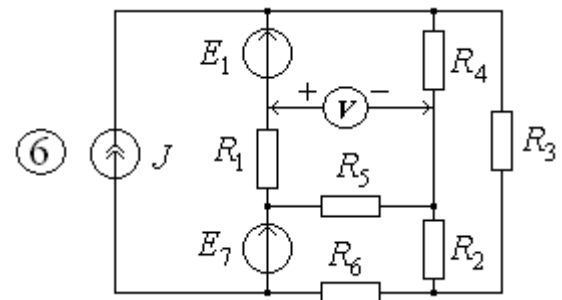
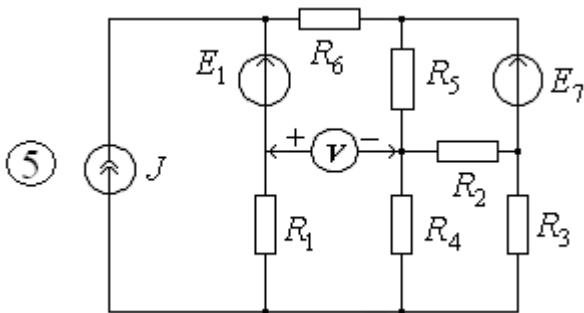
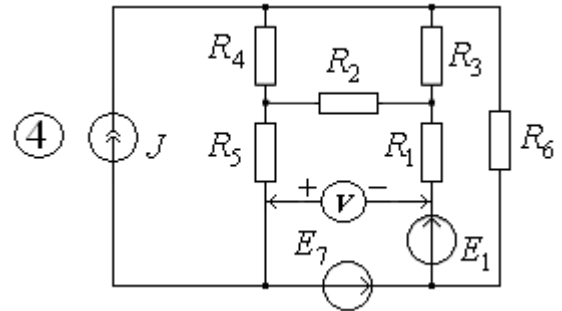
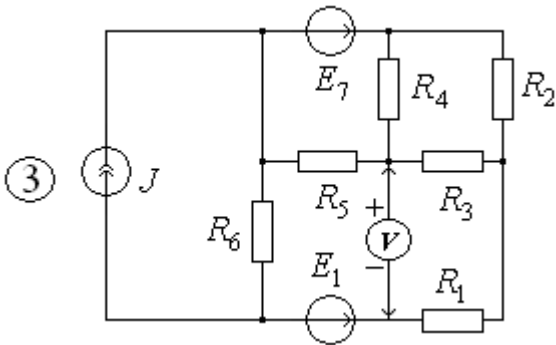
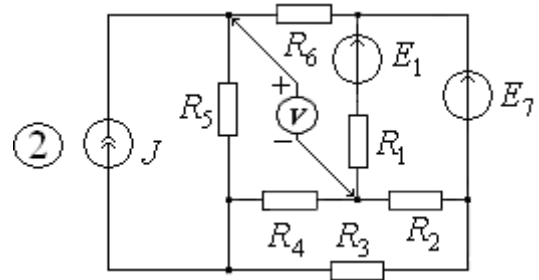
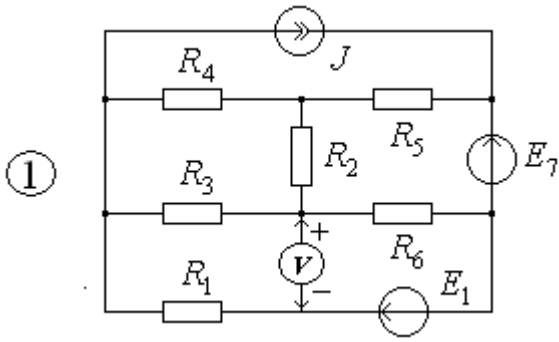
Шифр задається викладачем.

Таблица №1

Параметр	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>0</i>
$E_1 (В)$	50	75	100	125	150	200	225	250	275	300
$E_7 (В)$	100	125	150	175	200	250	275	300	325	350
$J (А)$	5	7	10	13	15	20	22	25	28	30

Таблица №2

Параметр	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>0</i>
$R_1 (Ом)$	15	20	25	30	60	55	50	45	40	10
$R_2 (Ом)$	20	25	30	35	55	50	45	40	35	15
$R_3 (Ом)$	25	30	35	40	50	45	40	35	30	20
$R_4 (Ом)$	30	35	40	45	40	35	30	25	20	25
$R_5 (Ом)$	35	40	45	50	35	30	35	20	25	30
$R_6 (Ом)$	40	45	50	55	30	25	20	15	10	35



Список рекомендованої літератури.

1. *Антамонов В.Х., Курило И.А.* “Избранные задачи по линейным электрическим цепям”: Учебное пособие.-К.,: НМК ВО, 1993. – 96 с.
2. *Бойко В, С., Бойко В, В., Видолоб Ю. Ф., Курило I. А., Шеховцов В. I., Шидловська Н. А.* “Теоретичні основи електротехніки”.Т. 1.- К.: “Політехніка”,2004. –269 с.
3. *Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В.* "Основы теории цепей". – М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. *Нейман Л, Р., Демирчян К. С.* "Теоретические основы электротехники". Т.1. – М.: Высшая школа, 1981.
5. *Шебес М. Р.* "Задачник по теории линейных электрических цепей". – М.: Высшая школа, 1982.

Зміст

1.	Лінійні електричні кола постійного струму. Основні поняття.....	3
2.	Структура електричного кола.	6
3.	Закони Кірхгофа.....	8
4.	Закон Ома для вітки кола постійного струму.	10
5.	Потенціальні діаграми.	13
6.	Методи аналізу електричних кіл. Метод рівнянь Кірхгофа.	16
7.	Метод контурних струмів.	18
8.	Метод вузлових потенціалів..	23
9.	Еквівалентні перетворення електричних кіл.	26
10.	Метод накладання дії джерел енергії.	29
11.	Метод пропорційного перерахунку.	37
12.	Двополюсник. Метод еквівалентного генератора.	38
13.	Теорема про активний двополюсник.	38
14.	Теорема компенсації.	44
15.	Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.	45
16.	Завдання на самостійну роботу.	47
17.	Список рекомендованої літератури.	50