

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

**РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
СИНУСОЇДНОГО ОДНОФАЗНОГО СТРУМУ**

Методичні вказівки

до виконання розрахункових робіт з курсу “Теоретична електротехніка”
для студентів напрямів підготовки 0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”,
0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”, 0915 “Компютерна
інженерія”.

*Гриф НТУУ “КПІ” наданий рішенням Методради університету
від 17.06.2004 р. Протокол №10.*

Київ 2004

Розрахунок електричних кіл синусоїдного однофазного струму: Метод. вказівки до виконання розрахункових робіт з курсу “Теоретична електротехніка” для студ. напрямів підготовки 0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”, 0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”, 0915 “Компютерна інженерія”.

/ Уклад.: І. А. Курило, І. Н. Намацалюк, А. А. Щерба. – К.: НТУУ “КПІ”, 2004.- с.

Навчальне видання

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
СИНУСОЇДНОГО ОДНОФАЗНОГО СТРУМУ

Методичні вказівки

до виконання розрахункових робіт з курсу “Теоретична електротехніка”
для студентів напрямів підготовки 0906 “Електротехніка”, 0914 “Електроніка”,
0914 “Компютеризовані системи, автоматика і управління”, 0915 “Компютерна
інженерія”.

Укладачі: Курило Ігор Анатолійович
Намацалюк Ігор Нестерович
Щерба Анатолій Андрійович

Відповідальний редактор Ю. Ф. Видолоб, канд. техн. наук, доц.

Рецензент К. М. Вакуленко, д-р техн. наук, проф.

Зміст

Вступ.....	3
1. Синусоїдний струм та основні величини, що його характеризують.....	3
2. Зображення синусоїдних величин векторними.....	6
3. Особливості кіл змінного струму.....	8
4. Синусоїдний струм в опорі R	8
5. Синусоїдний струм в індуктивності.....	9
6. Синусоїдний струм в ємності.....	9
7. Зображення синусоїдних величин векторами на комплексній площині..	10
8. Дії над комплексними числами.....	11
9. Послідовне з'єднання елементів R , L , C у колі.....	13
10. Паралельне з'єднання елементів R , L , C у колі.....	14
11. Закони Кірхгофа у комплексній формі.....	15
12. Розрахунок складних кіл синусоїдного струму символічним методом...	16
13. Потужність у комплексній формі.....	17
14. Баланс потужностей.....	17
15. Топографічна діаграма електричного кола.....	17
Приклад 1.....	18
Приклад 2.....	22

ВСТУП

При вивченні курсів “Теоретичні основи електротехніки”, “Теорія електричних і магнітних кіл”, “Електротехніка і основи електроніки” навчальними планами передбачені такі важливі форми самостійної роботи студента як розв’язання задач і виконання розрахунково-графічних завдань.

Розв’язання задач і робота над розрахунково-графічними завданнями дозволяє студенту перевірити рівень знання теоретичного матеріалу, навчитись проводити інженерні розрахунки з необхідною точністю, користуватись засобами сучасної обчислювальної техніки, навчитись лаконічно і в логічній послідовності викладати свої думки.

Посібник повинен допомогти студенту в оволодінні методами розрахунку лінійних електричних кіл синусоїдного струму. Тут студент знайде стисло наведені найбільш важливі теоретичні положення, рівняння і формули. На конкретних прикладах показані особливості розрахунку електричних кіл синусоїдного струму.

Розглянуті векторні і топографічні діаграми, резонансні режими, частотні характеристики, електричні кола з індуктивно-зв’язаними елементами, чотириполюсники.

1. Синусоїдний струм та основні величини, що його характеризують.

Синусоїдний струм - струм, що змінюється у часі за синусоїдним законом:

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \psi_i\right) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Графік (часова діаграма) його показаний на *Рис. 1*. Максимальне значення функції - амплітуда. Амплітуду струму позначають I_m .

$\omega t + \psi_i$ - фаза синусоїдної функції - числове значення її величини в даний момент часу.

ψ_i - початкова фаза - значення фази в момент часу $t = 0$, вона може бути додатня або від’ємна, і визначається від точки, де функція міняє знак «-» на «+», до початку координат. На *Рис. 1* початкова фаза додатня.

Період T - це час, за який здійснюється одне повне коливання.

Частота f - число коливань за 1 сек, $f = \frac{1}{T}$, вимірюється в сек^{-1} або в Герцах (Гц).

Кутова частота (швидкість зміни кута у часі) $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, вимірюється в рад/сек або сек^{-1} .

Будь-яка синусоїдна функція характеризується трьома величинами – амплітудою, кутовою частотою та початковою фазою (I_m , ω , ψ_i). На *Рис. 2* зображені синусоїдні напруга $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ і струм $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ однакової частоти, при чому $\psi_u < 0$, $\psi_i > 0$.

Відносне розміщення синусоїд визначається *кутом зсуву фаз* - φ , що дорівнює різниці початкових фаз напруги та струму $\varphi = \psi_u - \psi_i$. Чисельне значення кута зсуву фаз з урахуванням того, що період синусоїди у кутовому вимірі дорівнює 2π , вибирають у діапазоні $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

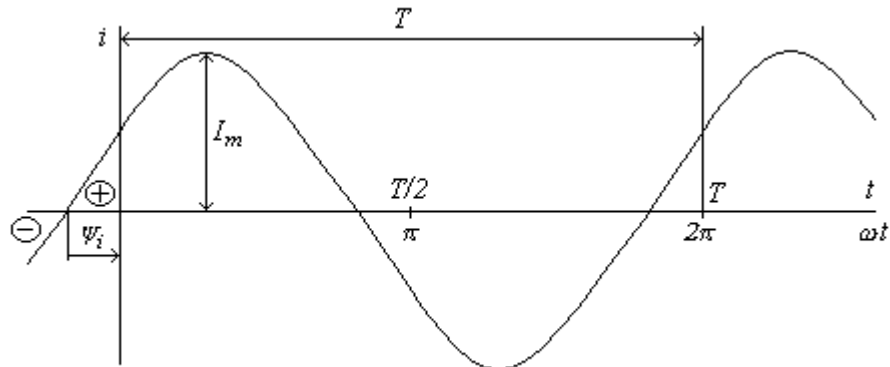


Рис. 1

При $\varphi > 0$ - напруга випереджає струм,
 $\varphi = 0$ - напруга і струм співпадають за фазою,
 $\varphi < 0$ - напруга відстає від струму.

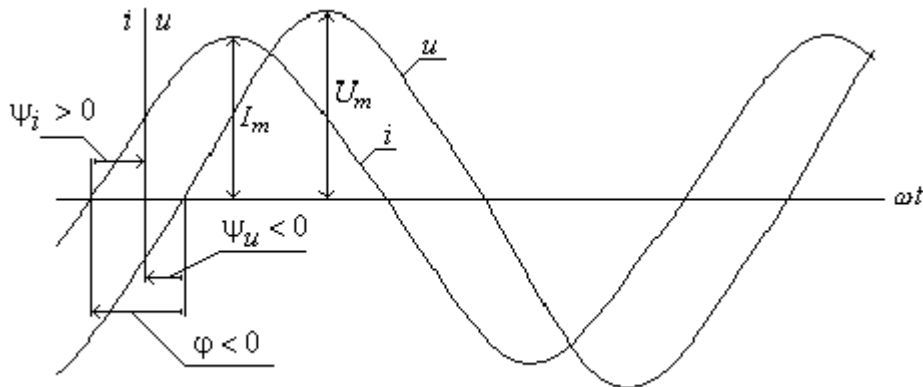


Рис. 2

В Україні, Росії та Західній Європі стандартна частота енергетичних установок синусоїдного струму 50 (Гц), в США - 60 (Гц). Діапазон частот, практично застосовуваних, синусоїдних струмів досить широкий: від долей герца, наприклад, в геологорозвідці, до мільярдів герц в радіотехніці.

Синусоїдні струми низьких частот (до декількох кілогерц) одержують за допомогою електромашинних синхронних генераторів (вивчаються у курсі електричних машин), синусоїдні струми більш високих частот одержують в напівпровідникових та лампових генераторах (вивчаються у курсі промислової електроніки).

Під середнім значенням синусоїдної ЕРС E_c (напруги, струму) розуміють середнє по модулю значення за період: це висота прямокутника, площа S якого, дорівнює площі фігури, обмеженої напівхвилею синусоїди (Рис.3).

$$S = E_c \frac{T}{2}$$

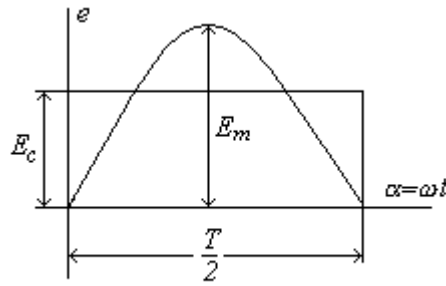


Рис. 3

$$E_c = \frac{S}{\frac{T}{2}} = \frac{\int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t dt}{\frac{T}{2}} = \frac{2E_m}{T\omega} (-\cos \omega t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2TE_m}{2\pi T} (1+1) = \frac{2E_m}{\pi} = 0.637E_m.$$

$$\boxed{E_c = 0.637E_m}$$

Аналогічно для струму і напруги $I_c = 0.637 I_m$, $U_c = 0.637 U_m$.

Більшість електровимірювальних приладів (наприклад, електромагнітної системи) показують не амплітуду і не середнє значення, а, так зване, *діюче* або *ефективне* значення синусоїдної величини. Діюче значення синусоїдного струму період якого T , дорівнює значенню такого еквівалентного постійного струму, який проходячи по тому ж опору, що й синусоїдний, за час T виділяє на ньому ту ж кількість енергії.

Енергія W , що поглинається в опорі R за час dt дорівнює: $W = i^2 R dt$. За час одного періоду: $W = \int_0^T i^2 R dt = R \int_0^T i^2 dt$. Енергія для постійного струму за цей же час: $W = I^2 RT$. Прирівнюємо

$$R \int_0^T i^2 dt = I^2 RT.$$

Звідки:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \left(\int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt \right)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} t} \Big|_0^T = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad \boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Аналогічно $\boxed{E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$.

Діючі значення синусоїдних величин у корінь з двох раз менші від амплітуди.

2. Зображення синусоїдних величин векторними.

Згідно з першим законом Кірхгофа, для вузла (Рис. 4) $i_1 = i_2 + i_3$.

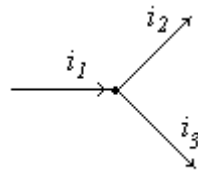


Рис. 4

При відомих струмах $i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2})$, $i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_{i3})$ струм i_1 можна знайти графічно, складаючи ординати синусоїд, $i_1 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_{i2}) + I_{m3} \sin(\omega t + \psi_{i3}) = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_{i1})$, але це викликає значні труднощі при по-будові.

Значно простішими обчислення будуть при заміні синусоїд векторами. Миттєві значення функції $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ можна одержати як проекцію на вертикальну вісь відрізка довжиною I_m (Рис. 5), який обертається відносно початку прямокутної системи координат з кутовою швидкістю $\omega = 2\pi f$ у позитивному напрямку (тобто проти годинникової стрілки). Цей відрізок називають умовним обертовим вектором.

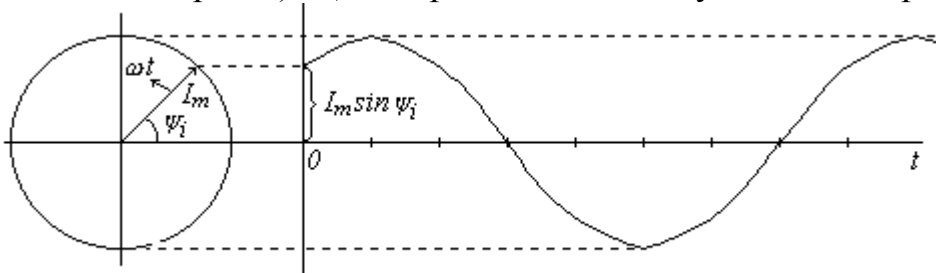


Рис. 5

У момент $t=0$ вектор розміщений під кутом ψ_i до горизонтальної осі і його проекція на вертикальну вісь дорівнює $I_m \sin \psi_i$, тобто миттєвому значенню заданої функції при $t=0$. За час $t=t_1$ вектор повернеться на кут ωt_1 і буде повернутий відносно горизонтальної осі на кут $\omega t + \psi_i$, а його проекція на вертикальну вісь буде $I_m \sin(\omega t_1 + \psi_i)$ і т.д.

Таким чином, розгляд синусоїдних функцій можна замінити розглядом обертових векторів, а для одержання миттєвих значень потрібно взяти проекцію векторів на вертикальну вісь. Будь-якому обертовому вектору можна поставити у відповідність синусоїду і, навпаки, будь-якій синусоїді можна поставити у відповідність обертовий вектор, а кут відраховувати від горизонтальної осі.

Якщо синусоїдні функції мають однакову частоту то відповідні їм вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю, а тому кути між ними незмінні.

Отже: якщо в електричному колі протікають синусоїдні струми і діють синусоїдні напруги однієї частоти, то у цьому випадку обертову систему векторів, що зображають синусоїди, можна зупинити (зафіксувати), тому що при обертанні кути між векторами не змінюються.

На Рис. 6 зображені вектори I_{2m} , I_{3m} зі своїми кутами ψ_{i2} , ψ_{i3} та їх сума I_{1m} з кутом ψ_{i1} . Діаграма, на якій показані вектори, що зображають синусоїдні напруги і струми з урахуванням зсуву фаз між ними називається векторною діаграмою.

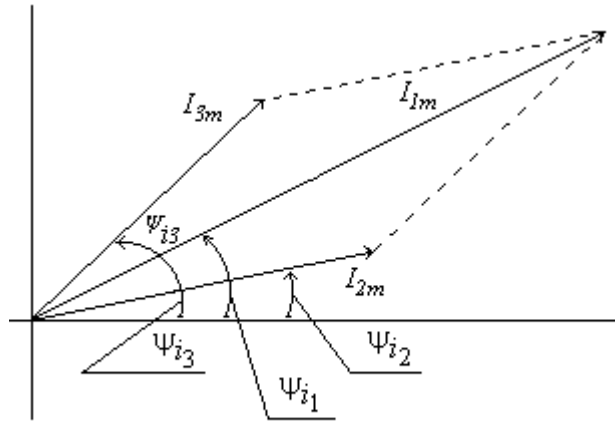


Рис. 6

Як відомо з математики, проекція геометричної суми векторів на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій цих векторів на ту ж вісь. Тобто алгебраїчному додаванню миттєвих значень синусоїд відповідає геометричне додавання зображаючих їх векторів. Векторна діаграма найбільш наочно показує співвідношення амплітуд та кути зсуву фаз між синусоїдними напру-гами і струмами.

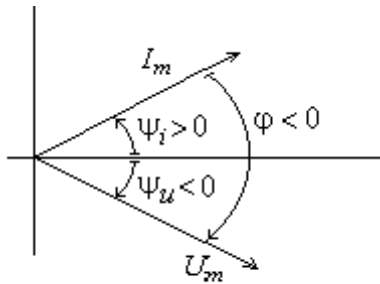


Рис. 7

На Рис. 7 зображена векторна діаграма для синусоїдних струму i та напруги u , показаних на Рис. 2. Кут $\psi_i > 0$ (відраховується від горизонтальної осі проти годинникової стрілки), кут $\psi_u < 0$ (відраховується за годинниковою стрілкою). Кут зсуву фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$ - (струм випереджає напругу).

Додатнім (напруга випереджає струм) вважається кут зсуву фаз φ , що відраховується від струму до напруги по найкоротшому шляху проти годинникової стрілки (Рис. 8, а), у протилежному випадку кут φ - від'ємний (Рис. 8, б).

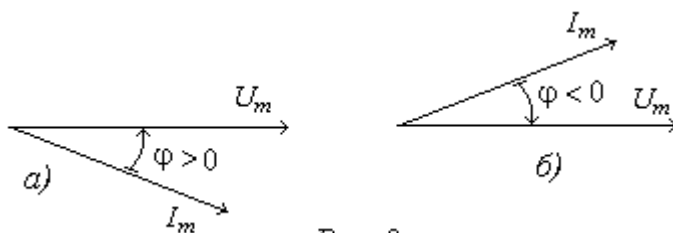


Рис. 8

Векторні діаграми будуються як для амплітуд, так і для діючих значень, в останньому випадку модулі векторів зменшуються в порівнянні з амплітудами в $\sqrt{2}$ раз.

3. Особливості кіл змінного струму.

Крім опору R при аналізі електромагнітних процесів у колах синусоїдного струму необхідно ввести у розгляд ще два елементи: індуктивний і ємнісний, параметри яких необхідно враховувати.

1. Індуктивність (L) - (визначає зв'язок між струмом i та потоком Φ (потокочепленням Ψ) $\Psi = iL = w\Phi$) характеризує здатність електричного кола створювати магнітне поле на окремих ділянках (в котушках): $L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w\Phi}{i}$

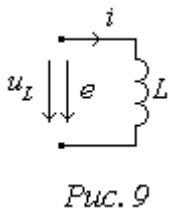


Рис. 9

При протіканні синусоїдного струму i , напруга u_L на котушці індуктивності (Рис. 9) дорівнює ЕРС самоіндукції:

$$u_L = -e = L \frac{di}{dt}. \text{ Звідки струм: } i = \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt + i(0).$$

2. Ємність (C) - (визначає зв'язок між напругою u і зарядом q : $uC = q$) характеризує здатність електричного кола зосереджувати електричне поле на окремих ділянках (в конденсаторах).

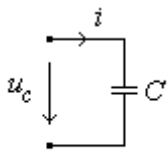


Рис. 10

Синусоїдний струм, що проходить через конденсатор

(Рис. 10), зв'язаний з напругою рівнянням: $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$;

звідки напруга $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0)$.

4. Синусоїдний струм в опорі R .

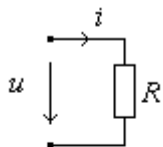


Рис. 11

При напрузі $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на опорі R (Рис. 11) струм визначається за законом Ома

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

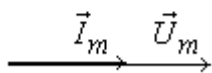


Рис. 12

Висновок: в опорі R струм i напруга співпадають за фазою (Рис. 12).

Опір R – як параметр синусоїдного струму називають *активним опором*, тому що в ньому відбувається необоротне перетворення електричної енергії на тепло, або в інші види енергії.

Середнє значення миттєвої потужності за період називається *активною потужністю* і вимірюється у ватах (кіловатах) ($Вт$, $кВт$).

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T (UI - UI \cos 2\omega t) dt = \frac{UIT}{T} - 0 = UI \quad \boxed{P = UI}$$

U і I - діючі значення.

$$P = UI = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}, \text{ або } P = UI = RI \cdot I = I^2 R.$$

Якщо ввести у розгляд активну провідність, як величину обернену до опору, то:

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = U^2 G = I^2 R = \frac{I^2}{G}$$

5. Синусоїдний струм в індуктивності.

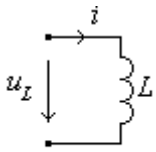


Рис. 13

Синусоїдний струм $i = I_m \sin \omega t = I\sqrt{2} \sin \omega t$, протікаючи через індуктивність (Рис. 13) створює на ній напругу:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = X_L I_m \cos \omega t = U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) =$$

де: $U_{mL} = \omega L I_m$.

$$= \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

Величина $\omega L = X_L$, що має розмірність опору, називається *індуктивним опором* котушки, змінюється пропорційно частоті. Обернена величина $\frac{1}{\omega L} = B_L$ називається *індуктивною провідністю*.

Висновок: в індуктивності L напруга випереджає струм на $\frac{\pi}{2}$.

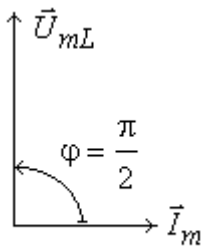


Рис. 14

Векторна діаграма показана на Рис. 14.

Миттєва потужність для індуктивності: $p = UI \sin 2\omega t = Q_L \sin 2\omega t$

Амплітуда миттєвої потужності, що дорівнює максимальній швидкості надходження енергії у магнітне поле котушки, називається *індуктивною потужністю*.

$$Q_L = UI = I X_L I = I^2 X_L = \frac{I^2}{B_L}, \text{ або: } Q_L = UI = U \frac{U}{X_L} = \frac{U^2}{X_L} = U^2 B_L$$

6. Синусоїдний струм в ємності.

Синусоїдна напруга $u_c = U_m \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t$ прикладена до ємності (Рис. 15) викликає у ній струм:

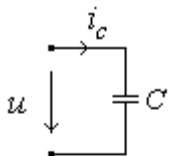


Рис. 15

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} \cos \omega t = I_{mC} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

де: $I_{mC} = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}$.

Величина $\frac{1}{\omega C} = X_C$, що має розмірність опору, називається *ємнісним опором* конденсатора, змінюється обернено пропорційно частоті. Обернена величина $B_C = \omega C$ називається *ємнісною провідністю*.

Висновок:
в ємності C

напруга відстає від струму на $\frac{\pi}{2}$.

Векторна діаграма показана на Рис. 16.

Миттєва потужність для ємності: $p = UI \sin 2\omega t = Q_C \sin 2\omega t$

Амплітуда миттєвої потужності, що дорівнює максимальній швидкості надходження енергії в електричне поле конденсатора, називається *ємнісною потужністю*.

$$Q_C = UI = IX_C I = I^2 X_C = \frac{I^2}{B_C}, \text{ або: } Q_C = UI = U \frac{U}{X_C} = \frac{U^2}{X_C} = U^2 B_C$$

7. Зображення синусоїдних величин векторами на комплексній площині.

Кожна точка на комплексній площині визначається радіусом-вектором цієї точки, тобто вектором, початок якого співпадає з початком координат, а кінець знаходиться у точці, що відповідає комплексному числу (Рис. 17).

У комплексному числі \dot{A} , A -модуль (довжина вектора), α - аргумент..
Форми запису комплексного числа:

$$\dot{A} = \underbrace{a + jb}_{\text{алгебраїчна}} = \underbrace{A \cos \alpha + jA \sin \alpha}_{\text{тригонометрична}} = \underbrace{A e^{j\alpha}}_{\text{показникова}} = \underbrace{A \angle \alpha}_{\text{полярна}} \quad j = \sqrt{-1}$$

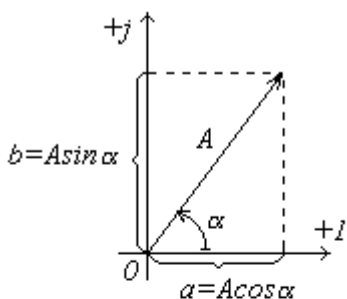


Рис. 17

Для одиничного вектора $1e^{j\alpha} = 1 \cos \alpha + j1 \sin \alpha$.

Модуль A може бути вираженим як гіпотенуза прямокутного трикутника: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут-
$$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$$
.

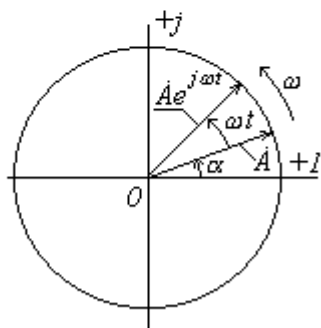


Рис. 18

Вектор, який обертається у позитивному напрямку (Рис. 18), тобто проти годинникової стрілки, з кутовою швидкістю ω може бути виражений так:

$\underline{Ae^{j(\omega t + \alpha)}} = \dot{A}e^{j\omega t}$, де $\dot{A} = Ae^{j\alpha} = A \angle \alpha$ - комплексна амплітуда, являє собою вектор в момент $t=0$. Це комплексна величина, що не залежить від часу, модуль і аргумент її відповідно дорівнюють амплітуді і початковій фазі синусоїдної функції.

$e^{j\omega t}$ - обертовий множник. Множення комплексної амплітуди \dot{A} на $e^{j\omega t}$ означає обертання вектора \dot{A} на кут ωt в позитивному напрямку.

Записуючи комплексну функцію у тригонометричній формі:

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha),$$

робимо висновок, що синусоїдна функція $A \sin(\omega t + \alpha)$ це уявна частина комплексної функції $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$, або ж проекція обертового вектора на уявну вісь.

Умовно це записується так: $A \sin(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \text{Im}(\dot{A}e^{j\omega t})$.

Символ Im означає, що береться уявна частина комплексної функції. Аналогічно косинусоїдна функція це дійсна частина комплексної функції, або ж як проекція обертового вектора на дійсну вісь:

$$A \cos(\omega t + \alpha) \leftrightarrow \text{Re}(\dot{A}e^{j\omega t}).$$

Де символ Re означає, що береться дійсна частина комплексної функції.

Якщо синусоїдні функції мають одну і ту ж частоту, то відповідні цим функціям вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю і тому кути між ними залишаються незмінними.

Вектори синусоїдно-змінних у часі величин прийнято зображати на комплексній площині для моменту часу $\omega t = 0$. Комплекс миттєвого значення струму: $i(t) \leftrightarrow I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$.

Комплексна амплітуда струму $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$, зображає струм i на комплексній площині для моменту часу $\omega t = 0$, I_m - модуль комплексної амплітуди струму, ψ - аргумент (кут).

Перехід від миттєвих значень синусоїдних функцій до комплексних амплі-туд і зворотний перехід досить простий; наприклад:

$$u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) \leftrightarrow \dot{U}_m = 220\sqrt{2} e^{j30^\circ} (B):$$

$$i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 40^\circ) \leftrightarrow \dot{I}_m = 5\sqrt{2} e^{-j40^\circ} (B):$$

$$\dot{U}_m = 40\sqrt{2} e^{j60^\circ} (B) \leftrightarrow u = 40\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ).$$

Комплекси діючих значень напруги та струму:

$$\dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \dot{U} = 220 e^{j30^\circ}; \dot{I} = 5 e^{-j40^\circ}.$$

8. Дії над комплексними числами.

Комплексна площина з комплексним числом $\dot{A} = a + jb$, знаки дійсної та уявної частин комплексного числа в чотирьох квадрантах показана на *Рис. 19*. Дії над комплексними числами досить широко вивчаються в курсі математики, тому у даному розділі обмежимося лише висновками:

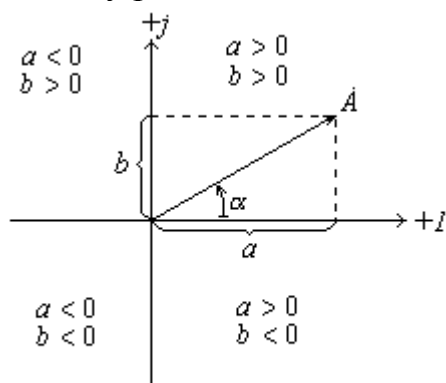


Рис. 19

1. Додавання і віднімання комплексних чисел проводиться в алгебраїчній формі:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\alpha_1} = a_1 + jb_1, \dot{A}_2 = A_2 e^{j\alpha_2} = a_2 + jb_2.$$

$$\dot{A}_1 \pm \dot{A}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) = \dot{A} = a + jb$$

2. Множення і ділення комплексних чисел простіше проводити у показниковій формі.

$$\dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = A_1 \cdot A_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}; \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

3. Піднесення до степеня та знаходження кореня проводяться у показниковій формі.

$$(\dot{A})^n = A^n e^{j(n\alpha)}; \sqrt[n]{\dot{A}} = \sqrt[n]{A} \cdot e^{j\frac{\alpha}{n}}.$$

4. Спряжені комплексні числа та дії над ними.

Спряжений до комплексу $\dot{A} = A e^{j\alpha} = a + jb$ комплекс $\dot{A}^* = A e^{-j\alpha} = a - jb$ відрізняється знаком аргумента.

$$\dot{A} \cdot \dot{A}^* = a^2 + b^2; \quad \dot{A} + \dot{A}^* = 2a; \quad \dot{A} - \dot{A}^* = 2jb; \quad \frac{\dot{A}}{\dot{A}^*} = 1e^{j2\alpha}.$$

5. Множення комплексу на $\pm j$ відповідає його повороту на $\pm 90^\circ$.

$$\pm j = e^{j\pm 90^\circ}; \quad \dot{A} \cdot (\pm j) = Ae^{j\alpha} \cdot 1e^{j\pm 90^\circ} = Ae^{j(\alpha \pm 90^\circ)}$$

$$j \cdot j = j^2 = e^{j180^\circ} = -1; \quad j^3 = j^2 \cdot j = -j = e^{j-90^\circ}; \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1; \quad \frac{1}{j} = -j.$$

Миттєвому значенню струму i відповідає комплексна амплітуда \dot{I}_m .

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}.$$

$$\frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \dot{I}_m$$

Диференціювання синусоїдної функції відповідає множенню комплексного зображення функції на $j\omega$.

Приклад. Комплексна напруга на індуктивності: $u_L = L \frac{di}{dt} \rightarrow j\omega L \dot{I}_m = \dot{U}_{mL}$.

$$\int idt \rightarrow \frac{\dot{I}_m}{j\omega}$$

Інтегрування синусоїдної функції відповідає діленню комплексного зображення на $j\omega$.

Приклад. Комплексна напруга на конденсаторі.

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt \rightarrow \frac{\dot{I}_m}{j\omega C} = -j \frac{\dot{I}_m}{\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_m.$$

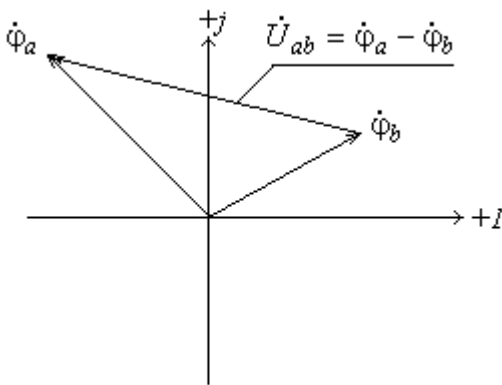


Рис. 20

На комплексній площині *Рис. 20* зображені *комплексні потенціали* (вектори) деяких точок (a , b) електричного кола $\dot{\phi}_a, \dot{\phi}_b$, а також їх різниця - замикаючий вектор - діюче значення *комплексної напруги* між точками a і b ;

$$\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b.$$

Перший індекс (a) показує до якої точки потрібно направити стрілку комплексної напруги.

Зауважимо, що напрям вектора \dot{U}_{ab} відносно точок a і b на векторній діаграмі протилежний напрямку відрахунку напруги \dot{U}_{ab} між цими точками на схемі.

Метод розрахунку електричних кіл, при якому синусоїдні величини (оригінали) замінені комплексами (зображеннями) називається *комплексним* або *символічним* методом.

9. Послідовне з'єднання елементів RLC у колі.

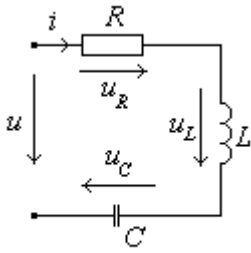


Рис. 21

Синусоїдна напруга u прикладена на вхід кола (Рис.22) з послідовним з'єднанням елементів R, L, C створює синусоїдний струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow I_m e^{j\psi_i}, \quad \dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I \angle \psi_i$$

де \dot{I} - комплекс діючого значення струму.

За другим законом Кірхгофа напруга на вході кола (контура) дорівнює сумі напруг на його елементах

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Від миттєвих значень можна перейти до їх зображень - комплексів:

$$u_R = iR \rightarrow \dot{I}R = \dot{U}_R; \quad u_L = L \frac{di}{dt} \rightarrow j\omega L \dot{I} = \dot{U}_L; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \dot{U}_C.$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I}R + j\omega L \dot{I} - j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \dot{I} \left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) = \dot{I} \underline{Z}. \quad \dot{U} = \dot{I} \underline{Z}.$$

Де $\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\varphi} = Z \angle \varphi$ - комплексний опір - імпеданс.

$$\boxed{\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}} \leftarrow$$

Це закон Ома у комплексній формі: *комплекс струму на ділянці кола дорівнює комплексу напруги на цій ділянці діленому на комплексний опір цієї ділянки.*

Якщо позначити $\omega L = X_L$, $\frac{1}{\omega C} = X_C$, тоді:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX;$$

де R - активний опір кола - *резистанс*, $X_L - X_C = X$ - реактивний опір кола - *реактанс*.

Наочно комплексний опір можна зобразити графічно Рис. 22:

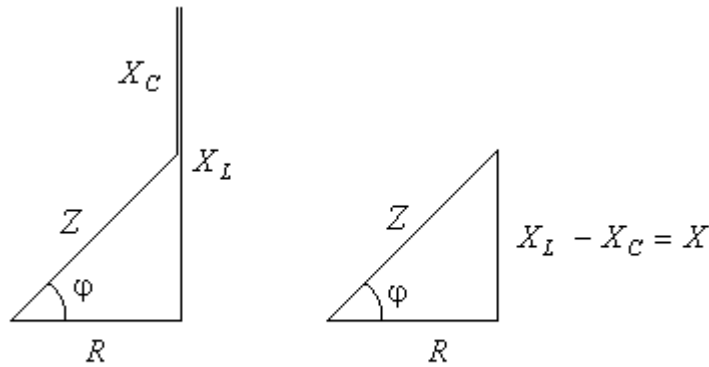


Рис. 22

Звідки:

$$Z = \sqrt{R^2 + x^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{x}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad R = Z \cos \varphi; \quad x = Z \sin \varphi.$$

Активна потужність кола: $P = UI \cos \varphi$

Множник $\cos \varphi$ називається *коефіцієнтом потужності*. Активна потужність дорівнює добутку діючих значень напруги і струму, помноженому на коефіцієнт потужності. Чим ближче кут до нуля, тим ближче коефіцієнт потужності до одиниці і, відповідно, тим більша при заданих значеннях U і I активна потужність передається від джерела до споживача. Підвищення коефіцієнта потужності промислових електроустановок це важлива технікоекономічна задача.

10. Паралельне з'єднання елементів RLC у колі.

При паралельному з'єднанні елементів R, L, C (Рис. 23) напруга на кожному з них однакова: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow \dot{U} = U \angle \psi_u$.

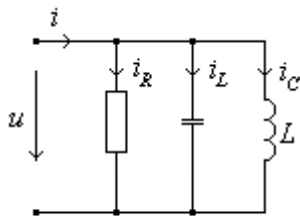


Рис. 23

За першим законом Кірхгофа:

$$i = i_R + i_L + i_C$$

Струми на елементах схеми виражаються через напругу:

$$i_R = \frac{u}{R} = uG = GU_m \sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow G\dot{U}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int u dt \rightarrow \frac{1}{j\omega L} \dot{U} = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U};$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} \rightarrow j\omega C \dot{U}.$$

$$\text{Або } \dot{I} = G\dot{U} - j \frac{1}{\omega L} \dot{U} + j\omega C \dot{U} = \dot{U} \left(G - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} \left[G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right];$$

$$\underline{Y} = G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = G - j(B_L - B_C) = (G - jB) = Y e^{-j\varphi} = Y \angle -\varphi$$

Де: \underline{Y} - повна комплексна провідність (адмінтанс).

G - активна провідність (кондуктанс).

$B_C = \omega C$ – емнісна провідність. $B_L = \frac{1}{\omega L}$ – індуктивна провідність.

$B = B_L - B_C$ – реактивна провідність (сусцептанс).

За комплексною провідністю $\underline{Y} = G - jB$, закон Ома записується:

$$\boxed{\underline{I} = \underline{U}\underline{Y}}$$

Більш наочно співвідношення між G, B, B_L, B_C зображається графічно (Рис. 24):

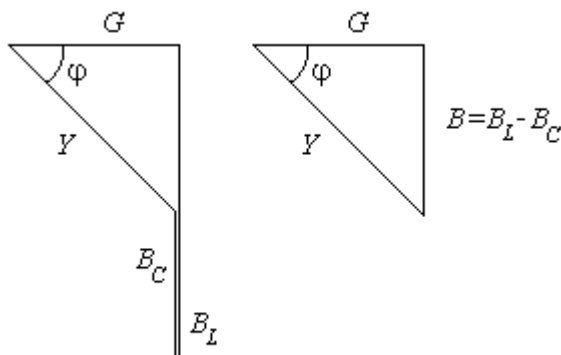


Рис. 24

Звідки:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}; \quad G = Y \cos \varphi; \quad B = Y \sin \varphi.$$

Будь-який пасивний двополюсник можна охарактеризувати комплексним опором або комплексною індуктивністю. Оскільки: $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ то, $\underline{Z}\underline{Y} = 1$.

Наприклад: $\underline{Z} = 5 \angle 30^\circ$ (Ом); $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = 0.2 \angle -30^\circ$ (Сім)

11. Закони Кірхгофа у комплексній формі.

I Закон Кірхгофа для струмів.

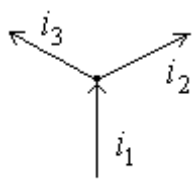


Рис. 25

Синусоїдні струми вузла (Рис.25) замінюються комплексами:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) \rightarrow \dot{I}_1; \quad i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2) \rightarrow \dot{I}_2;$$

$$i_3 = I_{m3} \sin(\omega t + \psi_3) \rightarrow \dot{I}_3.$$

Згідно з першим законом Кірхгофа: $i_1 - i_2 - i_3 = 0 \rightarrow \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$, або в загальній формі:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0}$$

Алгебраїчна сума комплексів струмів у вузлі дорівнює нулю.

II Закон Кірхгофа для напруг.

Синусоїдні напруги контура (Рис. 26) замінюються комплексами:

$$e_1 - e_2 - e_4 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - i_2 R_2 - \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + i_3 R_3 - L_4 \frac{di_4}{dt}$$

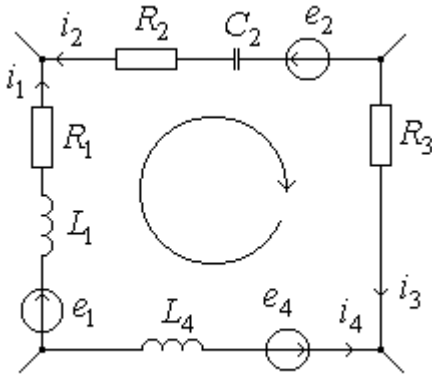


Рис. 26

Пі

У комплексній формі:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4 &= \dot{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - \dot{I}_2 R_2 - \frac{1}{j\omega C_2} \dot{I}_2 + \\ &+ \dot{I}_3 R_3 - j\omega L_4 \dot{I}_4, \end{aligned}$$

для групування:

$$\dot{I}_1 \underbrace{(R_1 + j\omega L_1)}_{Z_1} - \dot{I}_2 \underbrace{\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}_{Z_2} + \dot{I}_3 \underbrace{R_3}_{Z_3} - \dot{I}_4 \underbrace{j\omega L_4}_{Z_4} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4$$

можна записати $\dot{I}_1 Z_1 - \dot{I}_2 Z_2 + \dot{I}_3 Z_3 - \dot{I}_4 Z_4 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{E}_4$, або в загальному вигляді другий закон Кірхгофа формулюється:

Алгебраїчна сума комплексів напруг пасивних елементів контура дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС контура.

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^m \dot{E}_k}$$

Якщо ЕРС перенести в ліву частину рівняння і записати комплексну напругу кожної вітки з урахуванням ЕРС, то другий закон Кірхгофа формулюється аналогічно першому:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \dot{U}_k = 0}$$

Алгебраїчна сума комплексів напруг всіх віток контура дорівнює нулю.

12. Розрахунок складних кіл синусоїдного струму символічним методом.

Всі розрахункові методи для кіл постійного струму виведені на основі законів Кірхгофа, також справедливі і для кіл синусоїдного струму, в яких немає магнітного зв'язку між вітками. Кола з магнітним зв'язком між вітками будуть розглянуті нижче.

Відповідність між величинами, які описують стан кіл постійного та синусоїдного струмів:

$$E \rightarrow \dot{E}, I \rightarrow \dot{I}, R \rightarrow Z, G \rightarrow Y.$$

13. Потужність у комплексній формі.

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot I^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi =$$

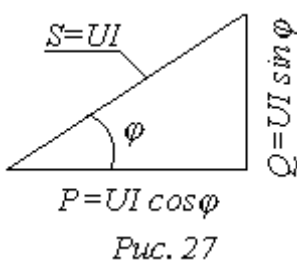
$$P + jQ = Se^{j\varphi}$$

$$\tilde{S} - \text{комплексна потужність.} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2};$$

S – модуль комплексної потужності, або інакше, повна потужність.

$P = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}(\dot{U} \cdot I^*)$ – активна потужність (дійсна частина комплексної потужності),

$Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im}(\dot{U} \cdot I^*)$ – реактивна потужність (уявна частина комплексної потужності).



Зв'язок між потужностями наочно показаний на Рис. 27.

14. Баланс потужностей.

Комплексна потужність джерела енергії (генератора) $\tilde{S} = \dot{U} I^* = P + jQ$ дорівнює комплексній потужності споживача $P_{cn} + jQ_{cn}$,

де: $P_{cn} = P_1 + P_2 + \dots + P_n = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + \dots + I_n^2 R_n$ - активна потужність споживача, дорівнює арифметичній сумі добутків квадратів діючих значень струмів на активні опори віток.

$Q_{cn} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = I_1^2 x_1 + I_2^2 x_2 + \dots + I_n^2 x_n$ - реактивна потужність споживача, дорівнює алгебраїчній сумі добутків квадратів діючих значень струмів на реактивні опори віток. Для ємнісних опорів реактивна потужність від'ємна ($Q < 0$).

15. Топографічна діаграма електричного кола.

Потенціали точок електричного кола – комплексні числа, тобто комплексні потенціали. Різниця комплексних потенціалів – комплексна напруга.

Топографічна діаграма - це діаграма розподілу комплексних потенціалів вузлів (точок) електричного кола. Вона будується так, щоб кожній точці кола відповідала однойменна точка на комплексній площині, яка є комплексним потенціалом цієї точки кола. На цій діаграмі показують напруги на всіх елементах кола, як різницю відповідних потенціалів.

На Рис. 28 показана одноконтурна схема електричного кола з заданими параметрами. Якісно побудуємо топографічну діаграму кола.

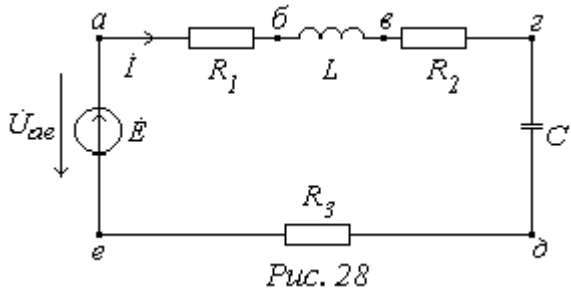


Рис. 28

За законом Ома визначається струм у

колі: $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}$. Прийнемо $\dot{I} = I \angle 0^\circ$, $\dot{\phi}_e = 0$.

Потенціали інших точок:

$$\dot{\phi}_e + \dot{I} \cdot R_3;$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_d - \dot{I} \cdot j \frac{1}{\omega C} = \dot{\phi}_d - \dot{I} \cdot jx_C;$$

$$\dot{\phi}_6 = \dot{\phi}_2 + \dot{I} \cdot R_2; \quad \dot{\phi}_b = \dot{\phi}_e + \dot{I} \cdot j\omega L = \psi_e + \dot{I} \cdot jx_L, \quad \psi_a = \psi_b + \dot{I} \cdot x_L.$$

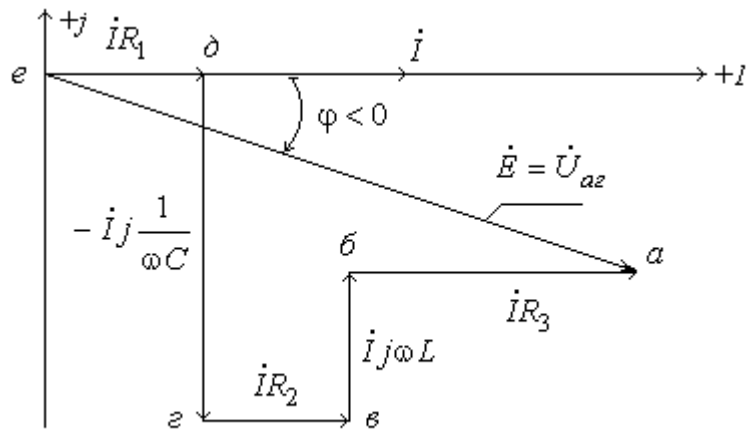


Рис. 29

Напряга на вході $\dot{U}_{ae} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_e = \dot{\phi}_a = \dot{E}$. На Рис. 29 побудована топографічна діаграма кола. Нагадаємо, що множення на $\pm j$ означає поворот вектора на $\pm 90^\circ$. Різниця комплексних потенціалів дорівнює комплексній напрузі між відповідними точками, наприклад,

$\dot{U}_{ab} = \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b$, $\dot{U}_{be} = \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_e$, і так далі. Згідно з другим законом Кірхгофа для

цього кола сума комплексних напруг \dot{U}_{ae} дорівнює ЕРС \dot{E} . Тобто топографічна діаграма є геометричною інтерпретацією другого закону Кірхгофа

Приклад 1.

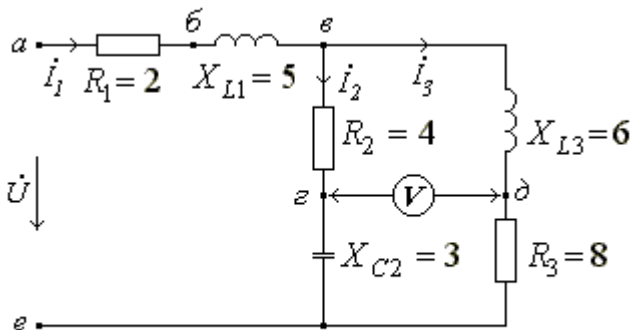


Рис. 11

В електричному колі Рис. 11 синусоїдна напруга на вході:

$$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ (В)}.$$

Параметри активних і реактивних опорів задані в Омах, частота $f=50$ (Гц).

Визначити діючі та миттєві значення струмів, зробити перевірку розрахунків за балансом потужностей. Визначити покази вольтметра. Побудувати сумісну векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг.

Для застосування символічного методу розрахунку переходим до комплекс-сів напруги $\dot{U} = 100e^{j60^\circ} = 100\angle 60^\circ$ (В), та комплексних опорів – імпедансів:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 2 + j5 \text{ (Ом)}, \quad \underline{Z}_2 = R_2 - jX_{C2} = 4 - j3 = 5\angle -36.87^\circ \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{L3} = 8 + j6 = 10\angle 36.87^\circ \text{ (Ом)}.$$

Комплексна еквівалентна схема кола показана на *Рис. П 1.1*

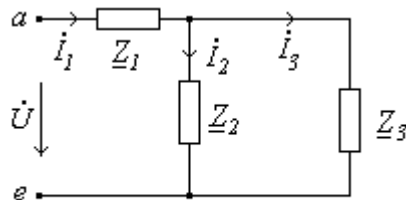


Рис. П 1.1

Згорнемо коло до одного еквівалентного опору. Паралельне з'єднання опорів $\underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ послідовно з'єднане з опором \underline{Z}_1 .

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{5\angle -36.86^\circ \cdot 10\angle 36.86^\circ}{4 - j3 + 8 + j6} = \frac{50\angle 0^\circ}{12 + j3} = \frac{50\angle 0^\circ}{12.36\angle 14.04^\circ} =$$

$$= 4.04\angle -14.04^\circ \text{ (Ом)};$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 2 + j5 + 4.04\angle -14.04^\circ = 2 + j5 + 3.92 - j0.98 = 5.92 + j4.02 =$$

$$= 7.16\angle 34.17^\circ \text{ (Ом)}.$$

Струми у вітках:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{100\angle 60^\circ}{7.16\angle 34.17^\circ} = 13.97\angle 25.83^\circ \text{ (А)};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 13.97\angle 25.83^\circ \frac{10\angle 36.87^\circ}{12.36\angle 14.04^\circ} = 11.30\angle 48.66^\circ \text{ (А)}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 13.97\angle 25.83^\circ \frac{5\angle -36.87^\circ}{12.36\angle 14.04^\circ} = 5.65\angle -25.08^\circ \text{ (А)};$$

Струм \dot{I}_3 також можна визначити за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2.$$

Перевірка правильності розрахунків проводиться за балансом потужностей. Потужність генератора розкладається на активну і реактивну складові

$$\tilde{S}_2 = \dot{U} \dot{I}_1^* = 100\angle 60^\circ \cdot 13.97\angle -25.83^\circ = 1397.24\angle 34.17^\circ = 1156.06 + j784.74 =$$

$$= P_2 + jQ_2 \text{ (ВА)}.$$

Активна потужність споживача:

$$P_{cn} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 13.97^2 \cdot 2 + 11.3^2 \cdot 4 + 5.65^2 \cdot 8 = 1156.05 \text{ (Вт)}.$$

Рективна потужність споживача:

$$Q_{cn} = I_1^2 x_1 - I_2^2 x_2 + I_3^2 x_3 = 13.97^2 \cdot 5 - 11.3^2 \cdot 3 + 5.65^2 \cdot 6 = 784.73 \text{ (ВАр)}.$$

Активні і реактивні потужності генератора і споживача практично однакові, баланс зійшовся – розрахунок вірний.

Перехід від комплексів до миттєвих значень струмів ($\omega = 2\pi f, I_m = I \cdot \sqrt{2}$):

$$\dot{I}_1 = 13.97 \angle 25.83^\circ \rightarrow i_1 = I_m \sin(\omega t + \psi_{i_1}) = 13.97 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi 50 + 25.83^\circ);$$

$$i_1 = 19.76 \sin(314.16t + 25.83^\circ) (A);$$

$$\dot{I}_2 = 11.30 \angle 48.66^\circ \rightarrow i_2 = 11.30 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi 50 + 48.66^\circ);$$

$$i_2 = 15.98 \sin(314.16t + 48.66^\circ) (A);$$

$$\dot{I}_3 = 5.65 \angle -25.08^\circ \rightarrow i_3 = 5.65 \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi 50 - 25.08^\circ);$$

$$i_3 = 7.99 \sin(314.16t - 25.08^\circ) (A).$$

Покази вольтметра визначимо за двома шляхами:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{zd} &= -\dot{U}_{ze} + \dot{U}_{ed} = -\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_3 jX_{L3} = -(11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 4) + 5.65 \angle -25.08^\circ \cdot 6 \angle 90^\circ = \\ &= -(45.20 \angle 48.66^\circ) + 33.9 \angle 64.92^\circ = -29.86 - j33.94 + 14.37 + j30.7 = \\ &= -15.49 - j3.24 = 15.83 \angle -168.19^\circ (B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{zd} &= U_{ze} - \dot{U}_{ed} = \dot{I}_2 (-jX_{C2}) - \dot{I}_3 R_3 = 11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ - 5.65 \angle -25.08^\circ \cdot 8 = \\ &= 33.9 \angle -41.34^\circ - 45.2 \angle -25.08^\circ = 25.45 - j22.39 - 40.93 + j19.16 = \\ &= -15.49 - j3.24 = 15.83 \angle -168.19^\circ (B). \end{aligned}$$

Вольтметр електромагнітної системи покаже діюче значення напруги, тобто модуль комплексу U_{zd} : $V = U_{zd} = 15.83 (B)$.

Для побудови топографічної діаграми кола визначаються комплексні потенціали точок кола відносно точки e , потенціал якої прийmemo за нуль: $\dot{\phi}_e = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_z &= \dot{\phi}_e - \dot{I}_2 jX_{C2} = 0 - 11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ = 33.89 \angle -41.34^\circ = \\ &= 25.44 - j22.39 (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_e &= \dot{\phi}_z + \dot{I}_2 R_2 = \dot{\phi}_z + 11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 4 = \dot{\phi}_z + 45.18 \angle 48.66^\circ = \\ &= 25.44 - j22.39 + 29.84 + j33.93 = 55.28 + j11.54 = 56.47 \angle 11.79^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\delta &= \dot{\phi}_e + \dot{I}_1 X_{L1} = \dot{\phi}_e + 13.97 \angle 25.83^\circ \cdot 5 \angle 90^\circ = \dot{\phi}_e + 69.87 \angle 115.83^\circ = \\ &= 55.28 + j11.53 - 30.44 + j62.89 = 24.85 + j74.42 = 78.46 \angle 71.54^\circ (B); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_a &= \dot{\phi}_\delta + \dot{I}_1 R_1 = \dot{\phi}_\delta + 13.97 \angle 25.83^\circ \cdot 2 = \dot{\phi}_\delta + 27.94 \angle 25.83^\circ = \\ &= 24.85 + j74.42 + 25.15 + j12.18 = 50 + j86.6 = 100 \angle 60^\circ; \end{aligned}$$

$$\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_e + \dot{I}_3 R_3 = 0 + 5.65 \angle 25.08^\circ \cdot 8 = 45.18 \angle 25.08^\circ = 40.92 + j19.15 (B);$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_\delta &= \dot{\phi}_d + \dot{I}_3 X_{L3} = \dot{\phi}_d + 5.65 \angle -25.08^\circ \cdot 6 \angle 90^\circ = \dot{\phi}_d + 33.89 \angle 64.92^\circ = \\ &= 40.92 + j19.15 + 14.36 - j30.69 = 55.28 - j11.54 = 56.47 \angle -11.79^\circ. \end{aligned}$$

Комплексна напруга на будь-якому елементі кола дорівнює різниці комплексних потенціалів відповідних точок, між якими знаходиться даний елемент.

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ze} &= \dot{\phi}_z - \dot{\phi}_e = \dot{I}_2 jX_{C2} = 11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ = 33.89 \angle -41.34^\circ (B); \\ \dot{U}_{ez} &= \dot{\phi}_e - \dot{\phi}_z = \dot{I}_2 R_2 = 11.30 \angle 48.66^\circ \cdot 4 = 45.18 \angle 48.66^\circ (B); \\ \dot{U}_{de} &= \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_e = \dot{I}_3 R_3 = 5.65 \angle -25.08^\circ \cdot 8 = 45.18 \angle -25.08^\circ (B); \\ \dot{U}_{ed} &= \dot{\phi}_e - \dot{\phi}_d = \dot{I}_3 jX_{L3} = 5.65 \angle -25.08^\circ \cdot 6 \angle 90^\circ = 33.89 \angle 64.92^\circ (B); \\ \dot{U}_{be} &= \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_e = \dot{I}_1 jX_{L1} = 13.97 \angle 25.83^\circ \cdot 5 \angle 90^\circ = 69.87 \angle 115.83^\circ (B); \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{I}_1 R_1 = 13.97 \angle 25.83^\circ \cdot 2 = 27.94 \angle 25.83^\circ (B); \end{aligned}$$

Сумісна векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг кола показана на *Рис. III.2*. Діаграма побудована починаючи з точки *e*, потенціал якої прийнятий за нуль; $\dot{\phi}_e = 0$.

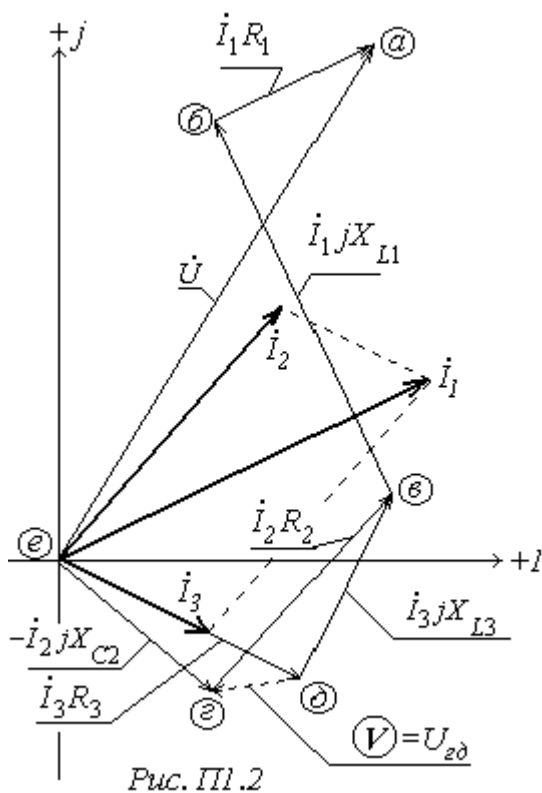


Рис. III.2

Кірхгофа вхідній напрузі \dot{U} .

$$\dot{U}_{ab} + \dot{U}_{be} + \dot{U}_{ze} + \dot{U}_{ed} = \dot{U}_{ae} = \dot{U}$$

Покази вольтметра відповідають модулю вектора напруги U_{2d} .

Аналогічно розраховується схема з п'ятьма вітками. З метою надбання на-вичок дій з комплексними числами у наступному прикладі пропонується само-стійно зробити проміжні обчислення і порівняти їх з приведеними кінцевими результатами.

Спочатку будується променева діаграма струмів (вектори струмів в масштабі із своїми кутами відкладаються з початку координат). Із діаграми видно, що

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \quad (\text{I закон Кірхгофа}).$$

З точки *e*, потенціал якої прийнятий за нульовий відкладаються в масштабі за розрахованими координатами комплексні потенціали відповідних точок. Очевидно вектори, що між цими точками (різниця потенціалів) – напруги на елементах кола між точками. Наприклад, наочно видно, що \dot{U}_{ze} – напруга на ємнісному опорі відстає від струму \dot{I}_2 на 90° , \dot{U}_{de} – напруга на активному опорі співпадає за фазою зі струмом \dot{I}_3 . Також наочно видно, що сума комплексів напруг між точками *e*, *z*, *b*, *a* дорівнює замикаючому вектору \dot{U}_{ae} , який дорівнює згідно другому закону

Приклад 2.

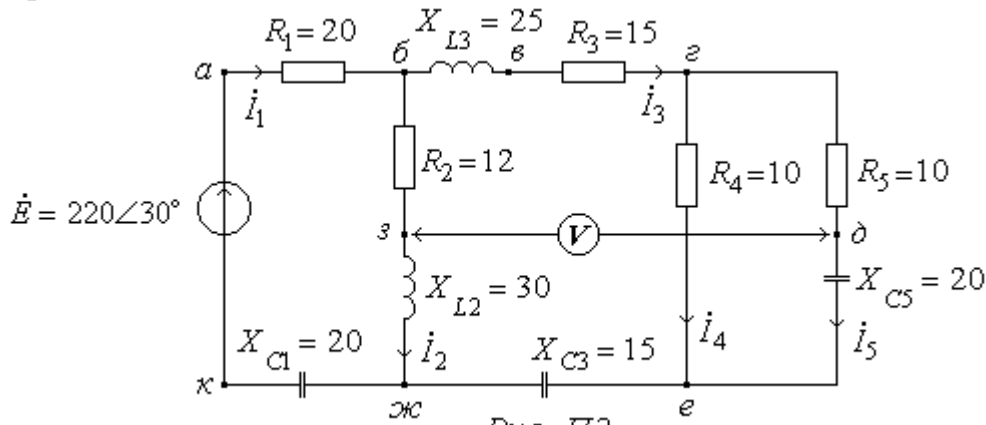


Рис. П2

В електричному колі Рис. П2 комплексна ЕРС на вході: $\dot{E} = 220\angle 30^\circ$ (В).

Параметри активних і реактивних опорів задані в Омах, частота $f=50$ (Гц).

Визначити діючі та миттєві значення струмів, зробити перевірку розрахунків за балансом потужностей. Визначити покази вольтметра. Побудувати сумісну векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг.

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 20 - j20 \text{ (Ом)}, \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 12 + j30 = 32.31\angle 68.20^\circ \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j(X_{L3} - X_{C3}) = 15 + j(25 - 15) = 15 + j10 \text{ (Ом)}, \quad \underline{Z}_4 = R_4 = 10 \text{ (Ом)},$$

$$\underline{Z}_5 = R_5 - jX_{L5} = 10 - j20 = 22.36\angle 63.43^\circ \text{ (Ом)}$$

Згортаєм схему до еквівалентного опору.

$$\underline{Z}_{45} = \frac{\underline{Z}_4 \cdot \underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \text{-----} = 7.91\angle -18.43^\circ = 7.50 - j2.50 \text{ (Ом)}.$$

$$\underline{Z}_{345} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{45} = \text{-----} = 22.50 + j7.50 = 23.72\angle 18.43^\circ \text{ (Ом)}.$$

Паралельне зеднання опорів між точками б, ж:

$$\underline{Z}_{бж} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \text{-----} = 15.04\angle 39.25^\circ = 11.65 + j9.51 \text{ (Ом)}.$$

Еквівалентний вхідний опір: $\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{бж} = \text{-----} = 33.34\angle -18.34^\circ \text{ (Ом)}.$

$$\text{Струми у вітках кола: } \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_e} = \frac{220\angle 30^\circ}{33.34\angle -18.33^\circ} = 6.60\angle 48.33^\circ \text{ (А);}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_{345}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \text{-----} = 3.07\angle 19.38^\circ \text{ (А);}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \text{ або } \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{345}} = \text{-----} = 4.18\angle 69.14^\circ \text{ (А);}$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_3 \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \text{-----} = 3.31\angle 50.71^\circ \text{ (А);}$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_3 - \dot{I}_4 \text{ або } \dot{I}_5 = \dot{I}_3 \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \text{-----} = 1.48\angle 114.14^\circ \text{ (А);}$$

Перевірка правильності розрахунків за балансом потужностей.

Потужність генератора:

$$\tilde{S}_2 = \dot{E} \cdot I_1^* = 220 \angle 60^\circ \cdot 6.60 \angle -48.33^\circ = 1451.79 \angle -18.33^\circ = 1378.11 - j456.60.$$

$$P_2 = 1378.11 (Bm), \quad Q_2 = -466.60 (BAp)$$

Сумарна активна P_{cn} і реактивна Q_{cn} потужності споживачів:

$$P_{cn} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 1378.11 (Bm).$$

$$Q_{cn} = -Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_5 = -I_1^2 X_{C1} + I_2^2 X_{L2} + I_3^2 (X_{L3} - X_{C3}) - I_5^2 X_{C5} = -456.60 (BAp).$$

Для перевірки правильності розрахунків покази вольметра (напряга \dot{U}_{3d}) визначаються двома шляхами:

$$1. \quad \dot{U}_{3d} = -\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_3 (R_3 + jX_{L3}) + \dot{I}_5 R_5 = -(3.07 \angle 19.38^\circ \cdot 12) + 4.18 \angle 69.14^\circ \cdot (15 + j25) + 1.48 \angle 144.14^\circ \cdot 10 = \dots = 151.48 \angle 140.11^\circ (B).$$

$$2. \quad \dot{U}_{3d} = \dot{I}_2 jX_{L2} - \dot{I}_3 (-jX_{C3}) - \dot{I}_5 (-jX_{C5}) = \dots = 151.50 \angle 140.11^\circ (B).$$

Очевидно покази вольметра (діюче значення напруги) $U_{3d} = 151.49 (B)$.

Для побудови топографічної діаграми визначаються комплексні потенціали точок кола. За нульовий приймаємо потенціал точки κ ; $\dot{\phi}_\kappa = 0$.

$$\dot{\phi}_{\kappa c} = \dot{\phi}_\kappa + \dot{I}_1 (-jX_{C1}) = 0 + 6.60 \angle 48.33^\circ \cdot 20 \angle -90^\circ = 131.98 \angle -41.67^\circ = 100.1 + j86.01 (B);$$

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_{\kappa c} + \dot{I}_2 jX_{L2} = 131.98 \angle -41.67^\circ + 3.07 \angle 19.38^\circ \cdot 30 \angle 90^\circ = 68.02 \angle -0.69^\circ = 68.02 + j0.82 (B);$$

$$\dot{\phi}_\sigma = \dot{\phi}_3 + \dot{I}_2 R_2 = 68.02 \angle -0.69^\circ + 3.07 \angle 19.38^\circ \cdot 12 = 103.41 \angle 6.33^\circ = 102.78 + j11.40 (B);$$

$$\dot{\phi}_a = \dot{\phi}_\sigma + \dot{I}_1 R_1 = 103.41 \angle 6.33^\circ + 6.60 \angle 48.33^\circ \cdot 20 = 220 \angle 30^\circ = 190.53 + j110 (B);$$

$$\dot{\phi}_e = \dot{\phi}_{\kappa c} + \dot{I}_3 (-jX_{C3}) = 131.98 \angle -41.67^\circ + 4.18 \angle 69.14^\circ \cdot 15 \angle -90^\circ = 191.95 \angle -35^\circ = 157.24 - j110.1 (B);$$

$$\dot{\phi}_\delta = \dot{\phi}_e + \dot{I}_5 (-jX_{C5}) = 191.95 \angle -35^\circ + 1.48 \angle 114.14^\circ \cdot 10 \angle -90^\circ = 208.68 \angle -28.01^\circ = 184.25 - j97.99 (B);$$

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_\delta + \dot{I}_5 R_5 = 208.68 \angle -28.01^\circ + 1.48 \angle 114.14^\circ \cdot 10 = 197.21 \angle -25.37^\circ = 178.19 + j84.50 (B);$$

$$\dot{\phi}_\theta = \dot{\phi}_2 + \dot{I}_3 R_3 = 197.21 \angle -25.37^\circ + 4.18 \angle 69.14^\circ \cdot 15 = 202.17 \angle -7.34^\circ = 200.51 - j25.83 (B);$$

Комплексні напруги на елементах кола дорівнюють різниці комплексних потенціалів відповідних точок, між якими знаходиться даний елемент.

$$\begin{aligned} \dot{U}_{a\bar{b}} &= \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{I}_1 R_1 = \dots = 131.98 \angle 48.33^\circ (B); \\ \dot{U}_{\bar{b}e} &= \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_e = \dot{I}_3 jX_{L3} = \dots = 104.60 \angle 159.14^\circ (B), \\ \dot{U}_{e\bar{z}} &= \dot{\phi}_e - \dot{\phi}_z = \dot{I}_3 R_3 = \dots = 62.17 \angle 69.14^\circ (B); \\ \dot{U}_{z\bar{e}} &= \dot{\phi}_z - \dot{\phi}_e = \dot{I}_4 R_4 = \dots = 33.08 \angle 50.71^\circ (B); \\ \dot{U}_{\bar{z}d} &= \dot{\phi}_z - \dot{\phi}_d = \dot{I}_5 R_5 = \dots = 14.79 \angle 114.14^\circ (B); \\ \dot{U}_{d\bar{e}} &= \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_e = \dot{I}_5 (-jX_{C5}) = \dots = 25.59 \angle 24.14^\circ (B); \\ \dot{U}_{e\bar{жк}} &= \dot{\phi}_e - \dot{\phi}_{жк} = \dot{I}_3 (-jX_{C3}) = \dots = 62.77 \angle -20.86^\circ (B); \\ \dot{U}_{\bar{b}z} &= \dot{\phi}_b - \dot{\phi}_z = \dot{I}_2 R_2 = \dots = 36.86 \angle 19.38^\circ (B); \\ \dot{U}_{z\bar{жк}} &= \dot{\phi}_z - \dot{\phi}_{жк} = \dot{I}_2 jX_{L2} = \dots = 92.14 \angle 109.38^\circ (B); \\ \dot{U}_{\bar{жк}к} &= \dot{\phi}_{жк} - \dot{\phi}_к = \dot{I}_1 (-jX_{C1}) = \dots = 131.98 \angle -41.67^\circ (B). \end{aligned}$$

За розрахунковими даними побудована сумісна векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг (Рис. П2.1). Діаграма побудована починаючи з точки κ , потенціал якої прийнятий за нуль $\dot{\phi}_\kappa = 0$.

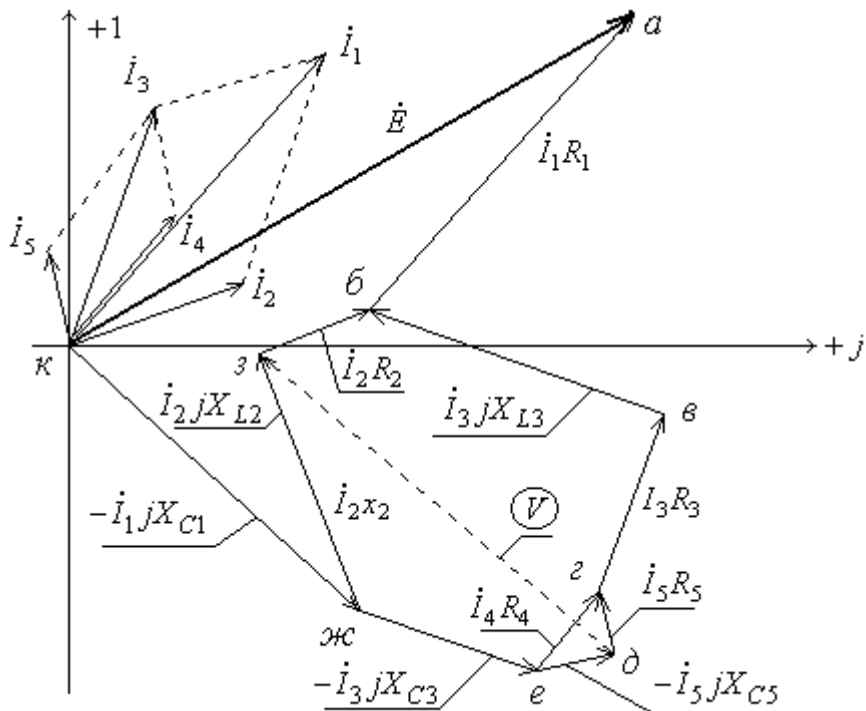


Рис. П2.1

Зміст

Вступ.....	3
1. Синусоїдний струм та основні величини, що його характеризують.....	3
2. Зображення синусоїдних величин векторними.....	6
3. Особливості кіл змінного струму.....	8
4. Синусоїдний струм в опорі R	8
5. Синусоїдний струм в індуктивності.....	9
6. Синусоїдний струм в ємності.....	9
7. Зображення синусоїдних величин векторами на комплексній площині..	10
8. Дії над комплексними числами.....	11
9. Послідовне з'єднання елементів R, L, C у колі.....	13
10. Паралельне з'єднання елементів R, L, C у колі.....	14
11. Закони Кірхгофа у комплексній формі.....	15
12. Розрахунок складних кіл синусоїдного струму символічним методом...	16
13. Потужність у комплексній формі.....	17
14. Баланс потужностей.....	17
15. Топографічна діаграма електричного кола.....	17
Приклад 1.....	18
Приклад 2.....	22