

## 16. Резонанс в електричних колах.

### Зміст

|  |    |
|--|----|
| Резонанс в електричних колах.....                                  | 24 |
| Послідовне з'єднання елементів $R, L, C$ . Резонанс напруг.....    | 25 |
| Частотні характеристики опорів послідовного контура.....           | 27 |
| Паралельне з'єднання віток $R, L$ і $R, C$ . Резонанс струмів..... | 28 |
| Приклад 3.....   | 31 |
| Приклад 4.....   | 32 |
| Частотні характеристики реактивних двополюсників.....              | 34 |
| Приклад 5.....   | 36 |

Внаслідок того, що індуктивні та ємнісні опори ( $\omega L, \frac{1}{\omega C}$ ), а також індуктивні та ємнісні провідності ( $\frac{1}{\omega L}, \omega C$ ) взаємно компенсуються, можливі випадки коли у електричному колі при наявності реактивних елементів, еквівалентний реактивний опір, а відповідно і реактивна провідність дорівнює нулю. Струм у колі співпадає за фазою з напругою на вході кола, тобто коло веде себе в цілому, як активний опір. Кут зсуву фаз  $\varphi = 0$ . Назва цього явища – *резонанс*.

### 17. Послідовне з'єднання елементів $R, L, C$ . Резонанс напруг.

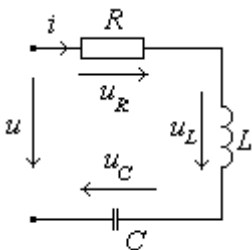


Рис. 30

Синусоїдна напруга  $u$  прикладена на вхід кола (Рис. 30) з послідовним з'єднанням елементів  $R, L, C$

$u = U_m \sin \omega t \rightarrow \dot{U}$  за другим законом Кірхгофа дорівнює сумі напруг на його елементах:  $u = u_R + u_L + u_C$

або в комплексній формі:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I}R + j\omega L \dot{I} - j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = \dot{I} \left( R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = \dot{I} \left( R + j \underbrace{(X_L - X_C)}_{X_e} \right) = \\ &= \dot{I} \underbrace{(R + jX_e)}_{\underline{Z}} = \dot{I} \underline{Z}. \end{aligned}$$

При  $X_e = 0$ ,  $\underline{Z} = R$ , тобто вхідний опір кола – активний.  $\dot{U} = \dot{I}R$ ,  $\varphi = 0$ . Це явище носить назву *резонанс напруг*. Умова резонансу напруг – рівність еквівалентного реактивного опору кола нулю, тобто:

$$\boxed{X_e = 0}, \text{ або } \boxed{X_L = X_C}, \text{ або } \boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C}}$$

Досягти резонансу можна підбором трьох параметрів – кутової частоти  $\omega$ , індуктивності  $L$  або ємності  $C$ , які визначаються із умови резонансу.

Резонансна частота:  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Резонансна індуктивність:  $L_p = \frac{1}{\omega^2 C}$

Резонансна ємність:  $C_p = \frac{1}{\omega^2 L}$

Індуктивний та ємнісний опори при резонансі:

$$X_L = X_C = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{1}{LC}} L = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad \boxed{\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho}$$

Величина  $\rho$  визначає опір індуктивного або ємнісного елемента при резонансі і називається *хвильовим* або *характеристичним опором* резонансного контура.

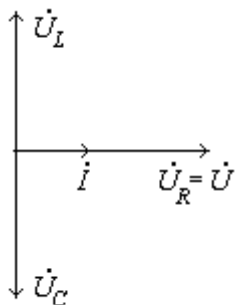
Відношення напруги на реактивних елементах при резонансі до напруги на вході називається *добротністю* ( $Q$ ) контура.

$$Q = \frac{U_{Lp}}{U} = \frac{U_{Cp}}{U} = \frac{I\rho}{IR} = \frac{\rho}{R}. \quad \boxed{Q = \frac{\rho}{R}}$$

При  $\rho > R$  напруги на реактивних елементах більші від напруги на вході. Величина, обернена добротності, називається *згасанням* (*послабленням*)  $d$  контура.

$$\boxed{d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}}$$

Векторна діаграма при резонансі напруг показана на *Рис. 31*.



*Рис. 31*

Частотні характеристики струму, напруг на елементах кола і кута  $\varphi$  зсуву фаз між напругою і струмом (*Рис. 32*) виражаються залежностями:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_L(\omega) = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$U_C(\omega) = \frac{U \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_R(\omega) = \frac{UR}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

При резонансі у послідовному контурі енергія коливається між електричним та магнітним полями і при максимумі струму в індуктивності зосереджується повністю у магнітному полі. При зменшенні струму енергія поступово переходить із магнітного поля в електричне, і при переході струму в індуктивності через нуль, коли напруга на конденсаторі досягає максимуму, вся енергія зосереджена в електричному полі. Далі процес повторюється. При цьому коло веде себе як

активний опір, повернення енергії із полів контура до джерела не буде. Якщо умови резонансу не виконуються, виникають коливання енергії між джерелом і полями. При кутових частотах від 0 до  $\omega_p$  індуктивний опір  $X_L = \omega L$  менший від ємнісного опору  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  і  $X_L - X_C < 0$ . На цьому проміжку частот струм у колі випереджає напругу на вході ( $\varphi < 0$ ). Зі збільшенням частоти  $X_L$  збільшується, а  $X_C$  зменшується і, відповідно,  $X_e$  за абсолютним значенням також зменшується, а струм у колі і напруга на активному опорі збільшуються. При резонансній частоті  $\omega_p$  індуктивний і ємнісний опори зрівнюються ( $X_L - X_C = 0$ ), струм у колі досягає свого максимуму  $I = \frac{U}{R}$  і співпадає за фазою з вхідною напругою. При дальшому підвищенні частоти  $X_L$  перевищить  $X_C$ ,  $X_e$  стає додатнім ( $X_L - X_C > 0$ ) і збільшується зі збільшенням частоти. Струм при цьому зменшується, прямуючи до нуля, і відстає за фазою від вхідної напруги ( $\varphi > 0$ ).

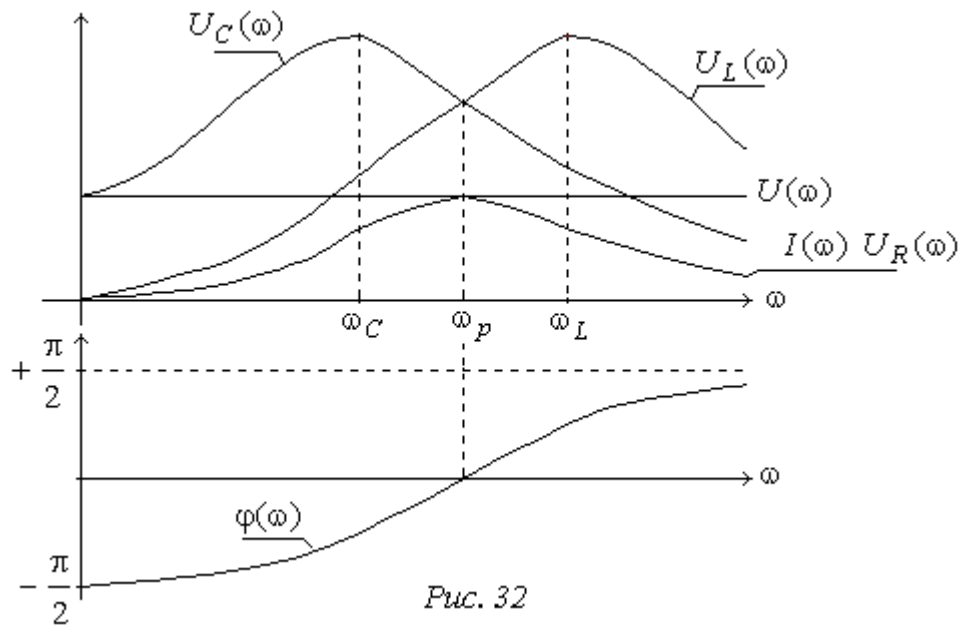


Рис. 32

### 18. Частотні характеристики опорів послідовного контура.

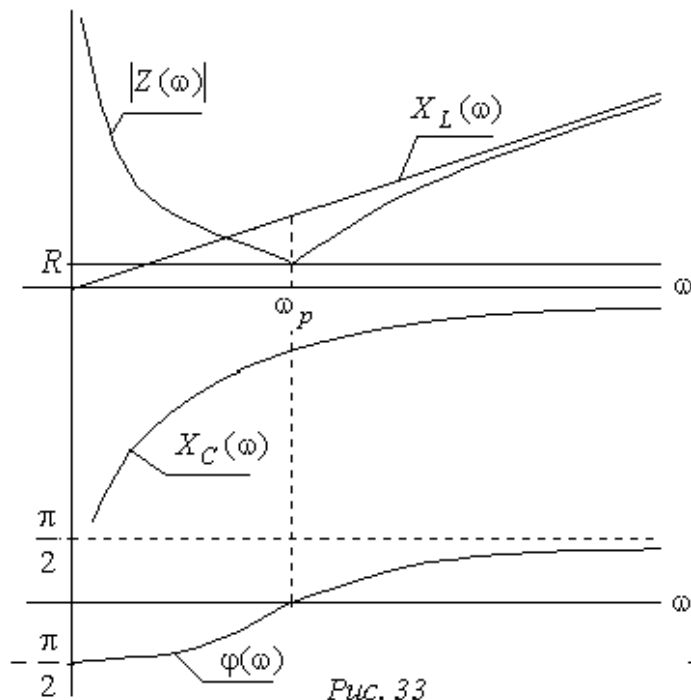


Рис. 33

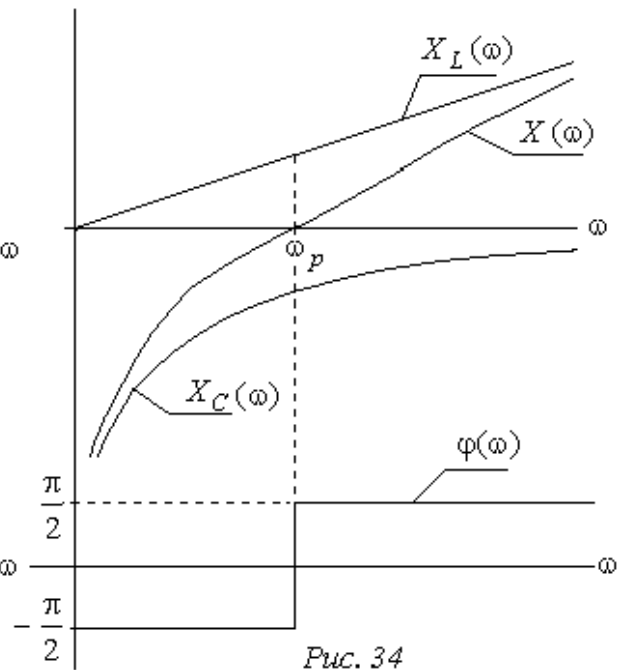


Рис. 34

На Рис. 33 побудовані частотні характеристики послідовного з'єднання елементів  $R, L, C - X_L(\omega), X_C(\omega), |Z(\omega)|, \varphi(\omega)$ . Частотна характеристика комплексного опору  $Z(\omega)$  побудована по модулю. При резонансній частоті еквівалентний опір кола активний. В ідеальному контурі ( $R=0$ ) вхідний опір  $X(\omega) = X_L(\omega) - X_C(\omega)$  при резонансі дорівнює нулю. Частотні характеристики ідеального контура показані на Рис. 34.

### 19. Паралельне з'єднання віток $R, L$ і $R, C$ . Резонанс струмів.

При паралельному з'єднанні віток з елементами  $R_1, L, R_2, C$  (Рис. 35) напруга  $\dot{U}$  на кожній з них однакова. За першим законом Кірхгофа:

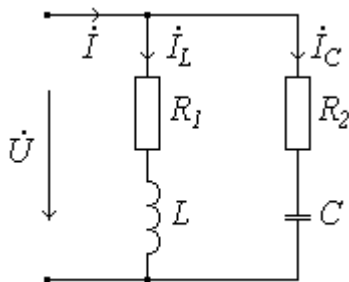


Рис. 35

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

Струм у першій вітці:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \dot{U} \underline{Y}_1 = \dot{U} \frac{1}{R_1 + j\omega L} =$$

домножимо чисельник і знаменник на спряжений комплекс знаменника,

$$= \dot{U} \left( \frac{1}{R_1 + j\omega L} \cdot \frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L} \right) = \dot{U} \left( \underbrace{\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}}_{G_1} - j \underbrace{\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}}_{B_1} \right) = \dot{U} (G_1 - jB_1)$$

Де  $G_1$  - активна і  $B_1$  - реактивна провідності першої вітки.

$$\text{Аналогічно для другої вітки: } \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2} = \dot{U} \underline{Y}_2 = \dot{U} \frac{1}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}} =$$

$$= \dot{U} \left( \frac{1}{R_2 - j \frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{R_2 + j \frac{1}{\omega C}}{R_2 + j \frac{1}{\omega C}} \right) = \dot{U} \left( \underbrace{\frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}_{G_2} + j \underbrace{\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}_{B_2} \right) = \dot{U} (G_2 - jB_2)$$

$$i = i_L + i_C = \dot{U} [(G_1 + G_2) - j(B_1 + B_2)].$$

Очевидно,  $\varphi = 0$  при  $B_1 + B_2 = 0$ , що являється умовою резонансу струмів. Тобто при резонансі струмів реактивні провідності віток за модулем рівні.

$$B = B_1 + B_2 = 0, \text{ або } \boxed{B_1 = -B_2}, \text{ або } \boxed{\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Звідси можна визначити резонансну частоту:

$$\omega^2 = \frac{\frac{R_1^2}{C} - \frac{L}{C^2}}{LR_2^2 - \frac{L^2}{C}} = \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{LC(R_2^2 - \frac{L}{C})}.$$

враховуючи, що  $\frac{L}{C} = \rho^2$ , запишемо:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}.$$

Як було розглянуто раніше,  $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_p$  - резонансна частота послідовного контура, складеного з тих же елементів, що і паралельний контур, тоді:

$$\omega_0 = \omega_p \sqrt{\frac{R_1^2 - \rho^2}{R_2^2 - \rho^2}}$$

У залежності від параметрів кола можливі такі випадки :

- $$\left. \begin{array}{l} 1. \rho^2 > R_1^2; \rho^2 > R_2^2 \\ 2. \rho^2 < R_1^2; \rho^2 < R_2^2 \end{array} \right\} \omega_0 - \text{дійсне число, резонанс можливий.}$$
- $$\left. \begin{array}{l} 3. \rho^2 > R_1^2; \rho^2 < R_2^2 \\ 4. \rho^2 < R_1^2; \rho^2 > R_2^2 \end{array} \right\} \omega_0 - \text{уявне число, резонанс неможливий.}$$

- $$5. \rho^2 = R_1^2 = R_2^2; \quad \omega_0 = \omega_p \sqrt{\frac{0}{0}} - \text{невизначеність, резонанс на всіх частотах.}$$

При резонансі струми у вітках  $i_L, i_C$  відносно напруги  $\dot{U}$  розміщені під кутами, відповідно  $\varphi_L, \varphi_C$  і можуть бути різними за величиною (Рис. 36), реактивні ж

складові струмів  $\dot{I}_{Lp}, \dot{I}_{Cp}$  однакові за величиною але протилежні за напрямом, а тому компенсуються:

$$\dot{I}_{Lp} + \dot{I}_{Cp} = 0$$

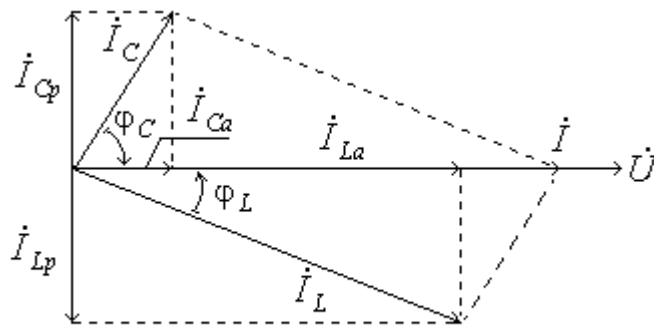


Рис. 36

Активні складові струмів  $\dot{I}_{La}, \dot{I}_{Ca}$  одного напрямку в сумі дають струм  $I$ :

$$\dot{I}_{La} + \dot{I}_{Ca} = \dot{I}$$

В радіотехніці і електрозв'язку часто застосовуються контури з малими втратами, в них  $R_1$  і  $R_2$  малі в порівнянні з  $\rho$ , тому, можна вважати, що в та-кому практично ідеальному паралельному контурі (Рис. 37) активні опори віток відсутні:  $R_1 = R_2 = 0$ .

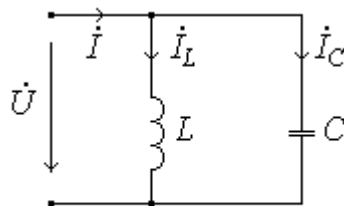


Рис. 37

$$i = i_L + i_C = \frac{\dot{U}}{j\omega L} + \frac{\dot{U}}{-j\frac{1}{\omega C}} = \dot{U} \left( \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} \right) = \dot{U} \left( -j\frac{1}{\omega L} + j\omega C \right) = -\dot{U} \cdot j(B_L - B_C)$$

При  $B_L - B_C = 0$  вхідний струм  $\dot{I}$  відсутній. Звідси умова резонансу струмів в ідеальному паралельному контурі:

$$\boxed{B_L = B_C}, \text{ або } \boxed{\frac{1}{\omega L} = \omega C}$$

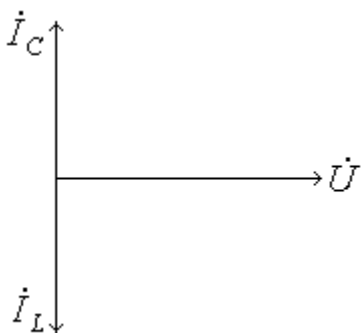


Рис. 38

Струми у вітках  $\dot{I}_L, \dot{I}_C$  не мають активних складових, тобто розміщені відносно напруги під кутами  $\pm 90^\circ$  (Рис. 38). Через те, що вхідний струм:

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = 0$$

то вхідна провідність паралельного контура дорівнює нулю ( $B_{ex} = 0$ ), або вхідний опір дорівнює нескінченності ( $X_{ex} = \infty$ ).

Резонансна частота  $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Індуктивна і ємнісна провідності віток при резонансі однакові:

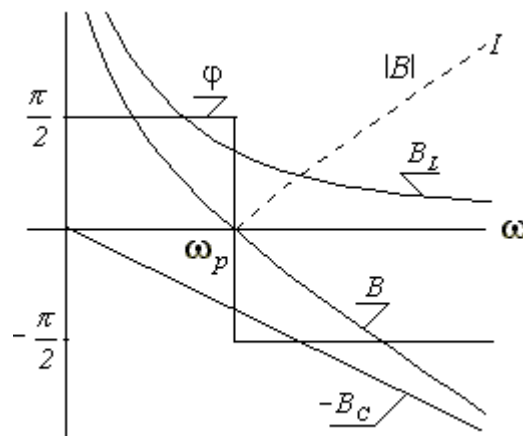
$$B_L = B_C = \frac{1}{\omega_p L} = \omega_p C = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$$

Величина  $\gamma$  - це *характеристична (хвильова) провідність*.

На *Рис. 39* показані частотні характеристики провідностей віток  $B_L = \frac{1}{\omega L}$ ,  $-B_C = -\omega C$ , загальної провідності  $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ , кута зсуву фаз  $\varphi$ .

Струм  $I = |B|U$ , тому крива  $|B| = B(\omega)$  у відповідному масштабі і є резонансна крива струму  $I(\omega)$ .

При зміні частоти від 0 до  $\omega_p$  еквівалентна провідність індуктивна ( $\varphi > 0$ ) і змінюється від  $\infty$  до 0. При  $\omega = \omega_p$  настає резонанс струмів  $B=0$ ,  $I=0$ . При збільшенні частоти від  $\omega_p$  до  $\infty$  еквівалентна провідність ємнісна ( $\varphi < 0$ ) і змінюється від 0 до  $-\infty$ .



*Рис. 39*

### Приклад 3.

Навантаження з параметрами  $R = 10$  (Ом) і  $X_L = 30$  (Ом) ввімкнено на напругу  $U = 220$  (В) з частотою  $f = 50$  (Гц), як показано на *Рис. П3.1*. Визначити ємність конденсатора, який потрібно підімкнути паралельно навантаженню з метою повної компенсації його реактивної потужності.

Струм через навантаження :

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 + j30} = \frac{220 \angle 0^\circ}{31.62 \angle 71.57^\circ} = 6.96 \angle -71.57^\circ \text{ (A)}$$

Струм відстає від напруги на кут  $\varphi = 71.57^\circ$  (*Рис. П3.2*). Активна потужність, що визначає енергію, за яку платить споживач

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 6.96 \cos 71.57^\circ = 484 \text{ (Вт)}$$

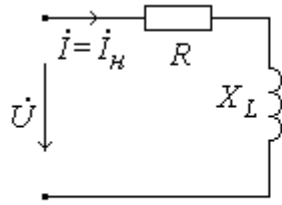


Рис. П3.1

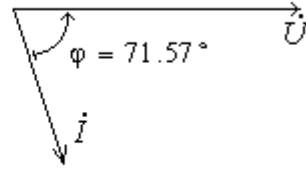


Рис. П3.2

Увімкнемо паралельно навантаженню конденсатор (Рис. П3.3) і визначимо його параметри з умови резонансу струмів.

$$B_1 = B_2; \frac{X_L}{X_L^2 + R^2} = \frac{1}{X_C}, \text{ звідки } X_C = \frac{X_L^2 + R^2}{X_L} = \frac{30^2 + 10^2}{30} = 33.33 \text{ (Ом)}.$$

$$\text{Ємність конденсатора } C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi 50 \cdot 33.33} = 9.55 \cdot 10^{-5} \text{ (Ф)}.$$

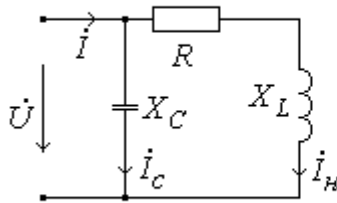


Рис. П3.3

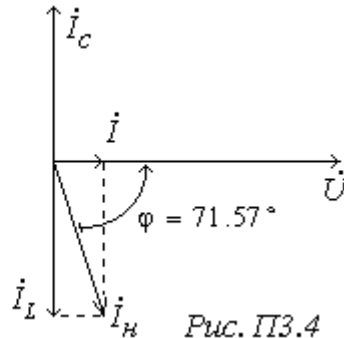


Рис. П3.4

Вхідний опір кола чисто активний:

$$Z_e = \frac{-jX_C(R + jX_L)}{-jX_C + R + jX_L} = \frac{33.33 \angle -90^\circ \cdot 31.62 \angle 71.57^\circ}{-j33.33 + 10 + j30} = \frac{1053.9 \angle -18.43^\circ}{10.539 \angle -18.43^\circ} = 100 \text{ (Ом)}.$$

Струм конденсатора

$$i_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \frac{220}{33.33 \angle -90^\circ} = 6.6 \angle 90^\circ \text{ (A)},$$

компенсує реактивну складову  $I_L$  струму навантаження  $I_H$  (Рис. П3.4),

$$I_L = I \cos(90^\circ - \varphi) = 6.96 \cos(90^\circ - 71.57^\circ) = 6.6 \text{ (A)}$$

Струм на вході кола  $\dot{I}$  співпадає за фазою з напругою

$$I = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_e} = \frac{220}{100} = 2.2 \text{ (A)}.$$

і зменшився в  $\frac{6.96}{2.2} = 3.16$  рази. Активна потужність кола залишилась такою ж

$$P = UI \cos 0^\circ = 220 \cdot 2.2 = 484 \text{ (Вт)}.$$

Приклад 4.



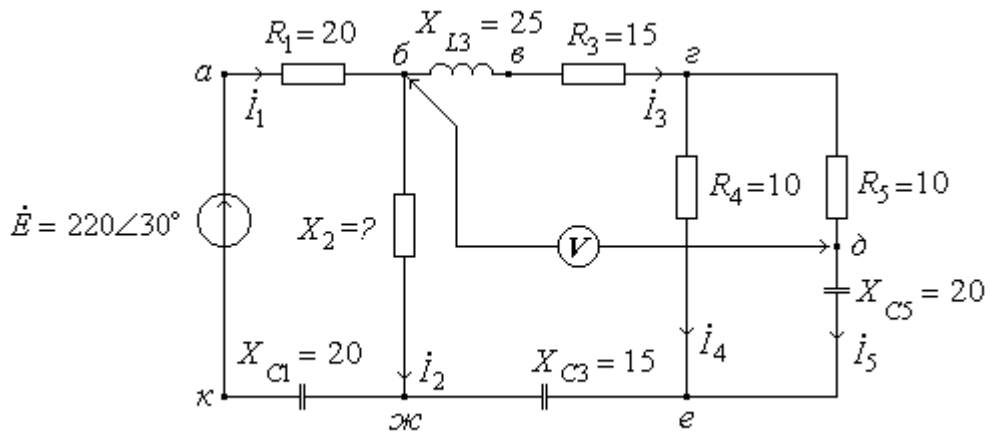


Рис. П4

В електричному колі на Рис.П4 визначити реактивний опір  $X_2$  за умовою резонансу струмів. Розрахувати струми для резонансного стану кола, перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей і визначити покази вольтметра.

Для розрахунку резонансного режиму частина кола праворуч від вітки з опором  $X_2$  замінюється раніше розрахованим (дивись приклад 2) опором

$$\underline{Z}_{345} = 22.50 + j7.50(\text{Ом}) \text{ (Рис. П4.1)}$$

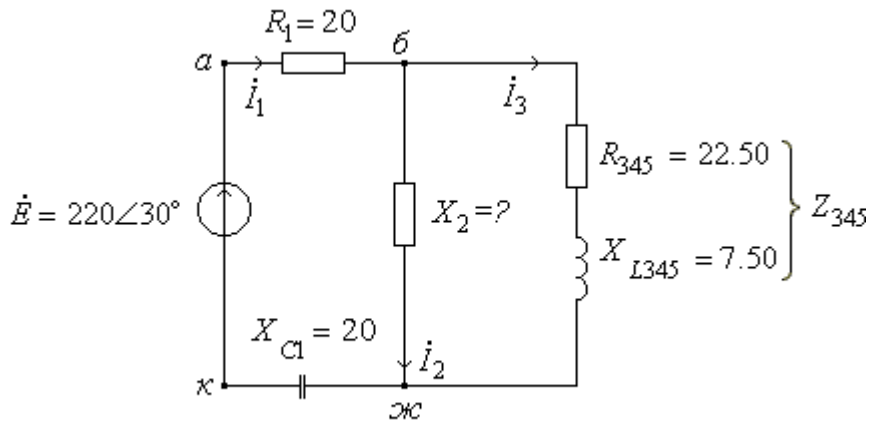


Рис. П4.1

За умовою резонансу струмів реактивний опір  $X_2$  буде ємнісний і визначається з умови:

$$B_{345} + B_2 = 0; \quad \frac{X_{L345}}{R_{345}^2 + X_{L345}^2} = \frac{1}{x_2}; \quad X_2 = \frac{R_{345}^2 + X_{L345}^2}{X_{L345}} = \frac{22.50^2 + 7.50^2}{7.50} = 75(\text{Ом}).$$

$$\underline{X}_{C2} = 75(\text{Ом}).$$

Кінцева схема резонансного кола (Рис. П4.2) розраховується як і в попередньому прикладі. Очевидно опір паралельного з'єднання віток з опорами  $\underline{Z}_{345}$  і  $X_{C2}$  буде активним:

$$\underline{Z}_{\text{б.ж}} = \frac{-jX_{C2} \cdot \underline{Z}_{345}}{-jX_{C2} + \underline{Z}_{345}} = \frac{75 \angle -90^\circ \cdot 23.72 \angle 18.43^\circ}{-j75 + 22.50 + j7.50} = \frac{1778.78 \angle -71.57^\circ}{71.15 \angle -71.57^\circ} = 25(\text{Ом}).$$

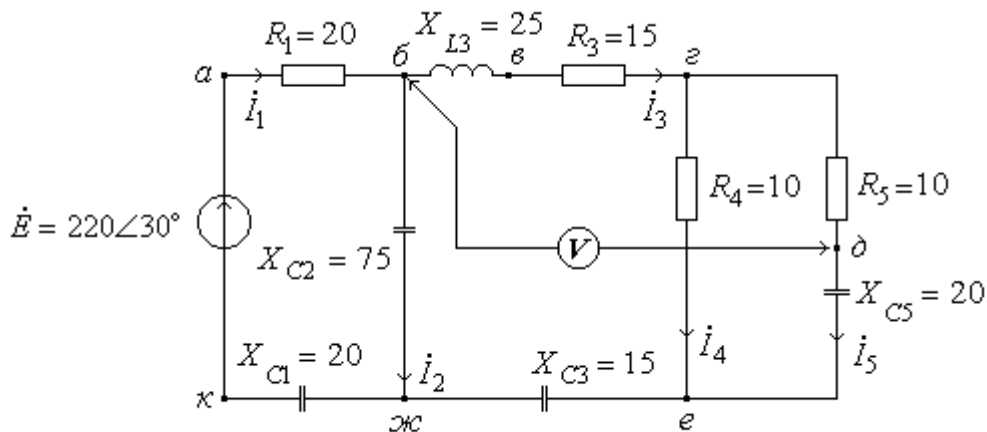


Рис. П4.2

Еквівалентний вхідний опір:

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{бж} = 20 - j20 + 25 = 45 - j20 = 49.24 \angle -23.96^\circ (\text{Ом}).$$

Струми у вітках кола:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_E} = \frac{220 \angle 30^\circ}{49.24 \angle -23.96^\circ} = 4.47 \angle 53.96^\circ (\text{А});$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_{345}}{-jX_{C2} + \underline{Z}_{345}} = \dots = 1.49 \angle 143.96^\circ (\text{А});$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 \text{ або } \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{-jX_{C2} + \underline{Z}_{345}} = \dots = 4.71 \angle 35.53^\circ (\text{А});$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_3 \frac{\underline{Z}_5}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \dots = 3.72 \angle 17.09^\circ (\text{А});$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_3 - \dot{I}_4 \text{ або } \dot{I}_5 = \dot{I}_3 \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5} = \dots = 1.66 \angle 80.53^\circ (\text{А});$$

Перевірте вірність розрахунків за балансом потужностей.

Потужність генератора:

$$\tilde{S}_2 = \dot{E} \cdot \dot{I}_1^* = 220 \angle 60^\circ \cdot 4.47 \angle -53.96^\circ = 982.85 \angle -23.96^\circ = 898.14 - j399.17.$$

$$P_2 = 898.14 (\text{Вт}), \quad Q_2 = -399.17 (\text{ВАр})$$

Сумарні активна ( $P_{cn}$ ) і реактивна ( $Q_{cn}$ ) потужності споживачів:

$$P_{cn} = P_1 + P_3 + P_4 + P_5 = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 898.14 (\text{Вт}).$$

$$Q_{cn} = -Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = -I_1^2 X_{C1} - I_2^2 X_{C2} + I_3^2 (X_{L3} - X_{C3}) + I_5^2 X_{C5} = -399.17 (\text{ВАр}).$$

Для перевірки правильності розрахунків покази вольметра (напряга  $\dot{U}_{\delta d}$ )

визначаються двома шляхами:

$$1. \dot{U}_{\delta d} = \dot{I}_3 (R_3 + jX_{L3}) + \dot{I}_5 R_5 = 4.71 \angle 35.53^\circ \cdot (15 + j25) + 1.66 \angle 80.53^\circ \cdot 10 = \dots = 153.5 \angle 93.06^\circ (\text{В}).$$

$$2. \dot{U}_{\delta d} = \dot{I}_2 (-jX_{C2}) - \dot{I}_3 (-jX_{C3}) - \dot{I}_5 (-jX_{C5}) = \dots = 153.5 \angle 93.06^\circ (\text{В}).$$

Очевидно покази вольметра (діюче значення напруги)  $U = 153.5 (\text{В})$ .

## 20. Частотні характеристики реактивних двополюсників.

Розглянемо частотну характеристику (ЧХ) вхідного опору реактивного двополюсника від частоти ( $Z=f(\omega)$ ). При конструюванні кола, яке складається із котушок індуктивностей і конденсаторів, наприклад LC-фільтрів та фазообертаючих контурів, для виявлення особливостей частотної характеристики часто можна знехтувати малими активними складовими, тобто вважати двополюсник чисто реактивним, отже вхідний опір буде чисто реактивний  $X = X(\omega)$ .

Частотні характеристики таких двополюсників мають визначені закономірності, які дозволяють просто синтезувати двополюсник за заданою ЧХ.

Найпростіші реактивні двополюсники – це індуктивність і ємність  $C$ , комплексні опори яких:  $Z_L = j\omega L$ ,  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ .

Визначення ЧХ реактивних двополюсників показано на прикладах.

1. Послідовне з'єднання реактивних опорів (Рис. 40).

$$\text{Вхідний опір кола: } X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Чисельник  $H(\omega)$  і знаменник  $F(\omega)$  функції частоти. Вхідний опір – дріб, дорівнює нулю, коли нулю дорівнює чисельник (нуль функції). Коли ж нулю дорівнює знаменник, вхідний опір дорівнює нескінченості – полюс функції.

Визначення нулів та полюсів функції  $X(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \quad \omega^2 LC - 1 = 0; \quad \text{звідки: } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

$$F(\omega) = 0; \quad \omega C = 0; \quad \text{звідки } \omega = 0.$$

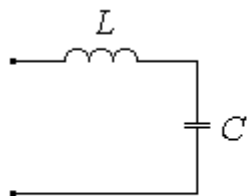


Рис. 40

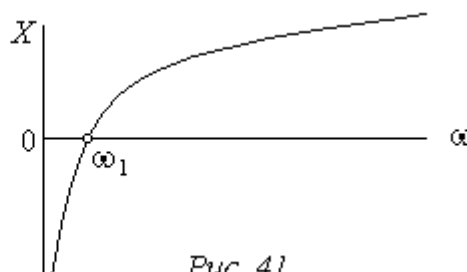


Рис. 41

Вхідний опір дорівнює нескінченості (розрив) при нульовій частоті (постійний струм через конденсатор не проходить), а при резонансній частоті  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , коли реактивні опори однакові, вхідний опір дорівнює нулю.

Схематично частотна характеристика показана на Рис. 41.

2. Паралельне з'єднання реактивних опорів (Рис. 42).

Вхідний опір кола:

$$X(\omega) = \frac{\omega L \left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{-\frac{L}{C}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \frac{-\frac{L}{C} \cdot \omega C}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

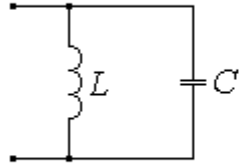
Визначення нулів та полюсів функції  $x(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \quad \omega L = 0; \quad \text{звідки: } \omega = 0.$$

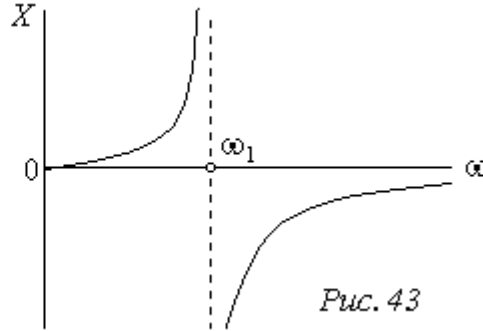
$$F(\omega) = 0; \quad \omega^2 LC - 1 = 0; \quad \text{звідки } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

При нульовій частоті вхідний опір дорівнює нулю (постійний струм замикається по індуктивності (к.з)). При частоті  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  у колі спостерігається резонанс струмів, вхідний опір при цьому дорівнює нескінченності.

Схематично частотна характеристика показана на *Рис. 43*.



*Рис. 42*



*Рис. 43*

2. Змішане з'єднання реактивних опорів (*Рис. 44*).

Вхідний опір кола:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= -\frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L(-\frac{1}{\omega C_2})}{\omega L - \frac{1}{\omega C_2}} = -\frac{1}{\omega C_1} + \frac{-\omega L}{\omega^2 LC_2 - 1} = \frac{\omega^2 LC_2 - 1 + \omega^2 LC_1}{\omega^3 LC_1 C_2 - \omega C_1} = \\ &= \frac{\omega^2 L(C_1 + C_2) - 1}{\omega C_1(1 - \omega^2 LC_2)} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}. \end{aligned}$$

Визначення нулів та полюсів функції  $X(\omega)$  :

$$H(\omega) = 0; \quad \omega^2 L(C_1 + C_2) - 1 = 0; \quad \text{звідки: } \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}.$$

$$F(\omega) = 0; \quad \omega C_1(-\omega^2 LC_2 + 1) = 0; \quad \text{звідки } \omega = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}.$$

При нульовій частоті  $\omega = 0$  і частоті  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$  вхідний опір дорівнює нескінченності (полюс функції) – паралельний резонанс (резонанс струмів), а при частоті  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$  дорівнює нулю (нуль функції) – послідовний резонанс (резонанс напруг). Схематично частотна характеристика показана на *Рис. 45*.

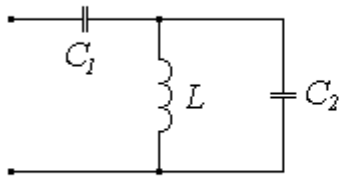


Рис. 44

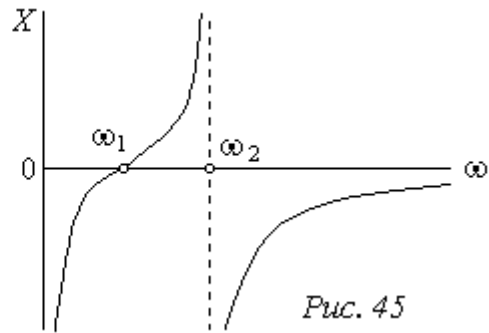


Рис. 45

Спільною рисою всіх розглянутих характеристик є виконання умови  $\frac{dX}{d\omega} > 0$ , звідки можна зробити висновок, що нулі і полюси чергуються, тобто, якщо перший був нуль, за ним обов'язково буде полюс. Для всіх реактивних двополюсників із послідовно-паралельних віток можна по вигляду схеми знайти число частот послідовного і паралельного резонансів.

Будемо вважати, що послідовне чи паралельне з'єднання однотипних елементів ( $L, C$ ) замінено еквівалентними елементами. Тоді двополюсник із двох елементів ( $L, C$ ) має одну резонансну частоту (Рис. 41, Рис. 43). Ускладнення схеми на один елемент збільшує число резонансних частот на одну (Рис. 45)

У двополюсника Рис. 46, два нулі і два полюси при  $\omega < \infty$ . Прямого шляху через індуктивність для постійного струму немає, відповідно, при  $\omega = 0$  частотна характеристика починається зі значення  $X = -\infty$  (полюс), а перша із резонансних частот  $\omega_1$  - частота послідовного резонансу (нуль) (Рис. 47), далі чергуються полюс  $\omega_2$  і нуль  $\omega_3$ . Загальна кількість нулів і полюсів частотної характеристики  $X(\omega)$  дорівнює кількості незалежних реактивних елементів плюс один нуль або полюс при  $\omega = \infty$ .

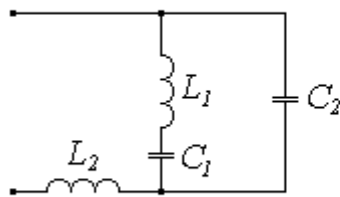


Рис. 46

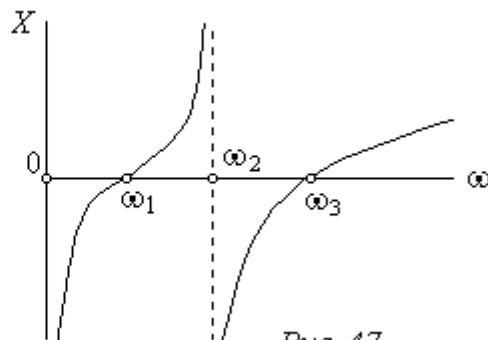


Рис. 47

### Приклад 5.

А) Побудувати частотну характеристику для реактивного двополюсника, показаного на Рис. П5.1 Він утворений з двополюсника (Рис. П1), в якому всі активні опори дорівнюють нулю. Параметри реактивних елементів знаходяться з умови, що у Прикладі 1 індуктивні і ємнісні опори задані для частоти 50 (Гц).

$$L_1 = \frac{X_{L1}}{\omega} = \frac{X_{L1}}{2\pi f} = \frac{5}{2\pi 50} = 1.59 \cdot 10^{-2} (\text{Гн}), \quad L_3 = \frac{X_{L3}}{\omega} = \frac{X_{L3}}{2\pi f} = \frac{6}{2\pi 50} = 1.91 \cdot 10^{-2} (\text{Гн}),$$

$$C_2 = \frac{1}{X_{C2}\omega} = \frac{1}{X_{C2}2\pi f} = \frac{1}{3 \cdot 2\pi 50} = 1.06 \cdot 10^{-3} (\text{Ф}).$$

По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеться з нуля (є прямий шлях через індуктивності для постійного струму ( $\omega = 0$ ), потім буде перша резонансна частота струмів  $\omega_1$  (поліус), за ним друга резонансна частота напруг  $\omega_2$  (нуль). Вхідний опір двополіусника:

$$X(\omega) = \omega L_1 + \frac{\omega L_3 \left(-\frac{1}{\omega C_2}\right)}{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}} = \omega L_1 - \frac{\omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} =$$

$$\frac{\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega L_1 - \omega L_3}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{\omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Визначення нулів та поліусів функції  $X(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \quad \omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3)) = 0; \quad \text{звідки: } \omega_0 = 0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}} = \sqrt{\frac{(1.59 + 1.91) \cdot 10^{-2}}{1.59 \cdot 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{108.725 \cdot 10^3} = 329.73 (\text{с}^{-1})$$

$$F(\omega) = 0; \quad \omega^2 L_3 C_2 - 1 = 0; \quad \text{звідки}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{4.5 \cdot 10^{-3}} = 222.24 (\text{с}^{-1}).$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до 400 ( $\text{с}^{-1}$ ) у рівняння вхідного опору будемо частотну характеристику реактивного двополіусника показану на *Рис. П5.2*.

$$X(\omega) = \frac{\omega(\omega^2 L_1 L_3 C_2 - (L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} = \frac{(\omega^3 L_1 L_3 C_2 - \omega(L_1 + L_3))}{\omega^2 L_3 C_2 - 1} =$$

$$= \frac{(\omega^3 1.59 \cdot 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-7} + \omega(1.59 + 1.91) \cdot 10^{-2}}{\omega^2 1.91 \cdot 1.06 \cdot 10^{-5} - 1}.$$

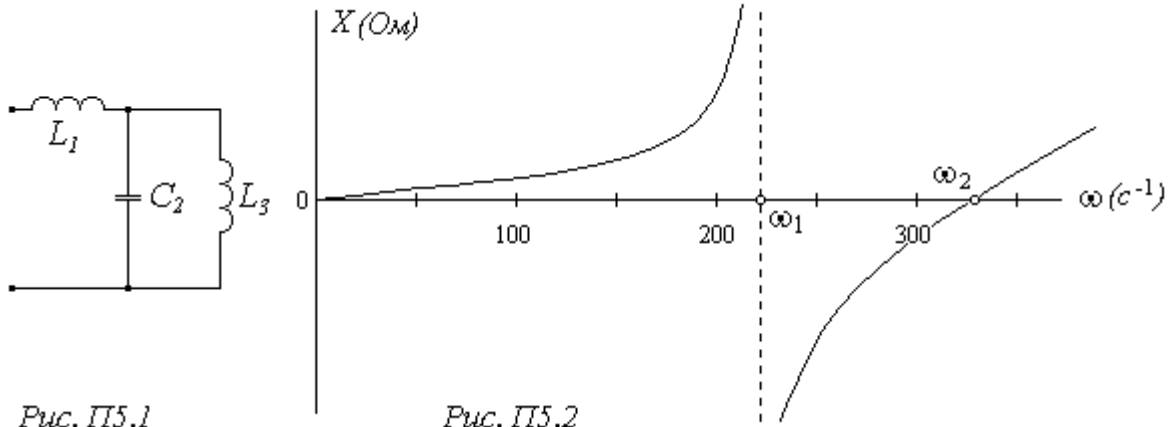


Рис. П15.1

Рис. П15.2

Аналогічно розраховується частотна характеристика для більш складних схем, при цьому степінь рівнянь у чисельнику та знаменнику відповідно збільшується з кількістю елементів у вітках схеми.

Б) Побудувати частотну характеристику для реактивного двополюсника, показаного на Рис. П15.3 . Параметри реактивних елементів:

$$L_1 = 0.143(\text{Гн}), \quad L_2 = 0.159(\text{Гн}), \quad L_3 = 0.175(\text{Гн}), \quad C_1 = 1.59 \cdot 10^{-4}(\text{Ф}),$$

$$C_2 = 2.12 \cdot 10^{-4}(\text{Ф}), \quad C_3 = 2.65 \cdot 10^{-4}(\text{Ф}).$$

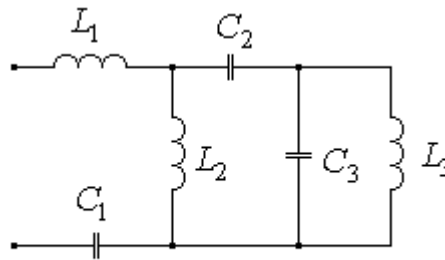


Рис. П15.3

По схемі можна визначити, що частотна характеристика почнеться з полюса (немає прямого шляху через індуктивність для постійного струму при  $(\omega = 0)$ ) і закінчиться полюсом (немає прямого шляху через ємність при  $(\omega = \infty)$ ).

Вхідний опір двополюсника знаходиться послідовним та паралельним складанням елементів схеми.

$$1. \quad \frac{\omega L_3 \left(-\frac{1}{\omega C_3}\right)}{\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3}} = -\frac{\omega L_3}{\omega^2 L_3 C_3 - 1} = \frac{\omega L_3}{1 - \omega^2 L_3 C_3};$$

$$2. \quad \frac{\omega L_3}{1 - \omega^2 L_3 C_3} - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{\omega^2 L_3 C_2 + \omega^3 L_3 C_3 - 1}{\omega C_2 - \omega^3 L_3 C_3 C_2} = \frac{\omega^2 L_3 (C_2 + C_3) - 1}{\omega C_2 (1 - \omega^2 L_3 C_3)},$$

$$3. \quad \frac{\frac{\omega^2 L_3 (C_2 + C_3) - 1}{\omega C_2 (1 - \omega^2 L_3 C_3)} \cdot \omega L_2}{\frac{\omega^2 L_3 (C_2 + C_3) - 1}{\omega C_2 (1 - \omega^2 L_3 C_3)} + \omega L_2} = \frac{\omega L_2 (\omega^2 L_3 (C_2 + C_3) - 1)}{-\omega^4 L_2 L_3 C_2 C_3 + \omega^2 (L_3 (C_2 + C_3) + L_2 C_2) - 1};$$

$$4. \quad \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1};$$

$$5. \quad \frac{\omega L_2 (\omega^2 L_3 (C_2 + C_3) - 1)}{-\omega^4 L_2 L_3 C_2 C_3 + \omega^2 (L_3 (C_2 + C_3) + L_2 C_2) - 1} + \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{\omega C_1} =$$

$$= \frac{-\omega^6 L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3 + \omega^4 (L_2 L_3 (C_1 (C_2 + C_3) + C_2 C_3) + (L_3 (C_2 + C_3) + L_2 C_2) L_1 C_1) - \omega^2 (C_1 (L_1 + L_2) + L_3 (C_2 + C_3) + L_2 C_2) + 1}{\omega C_1 \times (-\omega^4 L_2 L_3 C_2 C_3 + \omega^2 (L_3 (C_2 + C_3) + L_2 C_2) - 1)} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Підставляємо дані параметрів:

$$X(\omega) = \frac{-3.55 \cdot 10^{-14} \omega^6 + 6.338 \cdot 10^{-9} \omega^4 - 1.652 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1}{1.59 \cdot 10^{-4} \omega \cdot (-1.563 \cdot 10^{-9} \omega^4 + 1.172 \cdot 10^{-4} \omega^2 - 1)} = \frac{H(\omega)}{F(\omega)}.$$

Визначення нулів та полюсів функції  $X(\omega)$ :

$$H(\omega) = 0; \quad -3.55 \cdot 10^{-14} \omega^6 + 6.338 \cdot 10^{-9} \omega^4 - 1.652 \cdot 10^{-4} \omega^2 + 1 = 0;$$

Для зниження степені рівняння приймаємо:  $t = \omega^2$ , тоді:

$$-3.55 \cdot 10^{-14} t^3 + 6.338 \cdot 10^{-9} t^2 - 1.652 \cdot 10^{-4} t + 1 = 0.$$

Розв'язок кубічного рівняння дає корені:

$$t_1 = 9011.7, \quad t_2 = 21053.6, \quad t_3 = 148470.$$

Звідки значення частот нулів частотної характеристики:

$$\omega_1 = +\sqrt{t_1} = \sqrt{9011.7} = 94.93 \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad \omega_3 = +\sqrt{t_2} = \sqrt{21053.6} = 145.09 \text{ (с}^{-1}\text{)},$$

$$\omega_5 = +\sqrt{t_3} = \sqrt{148470} = 385.32 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

$$F(\omega) = 0; \quad 1.59 \cdot 10^{-4} \omega \cdot (-1.563 \cdot 10^{-9} \omega^4 + 1.172 \cdot 10^{-4} \omega^2 - 1) = 0;$$

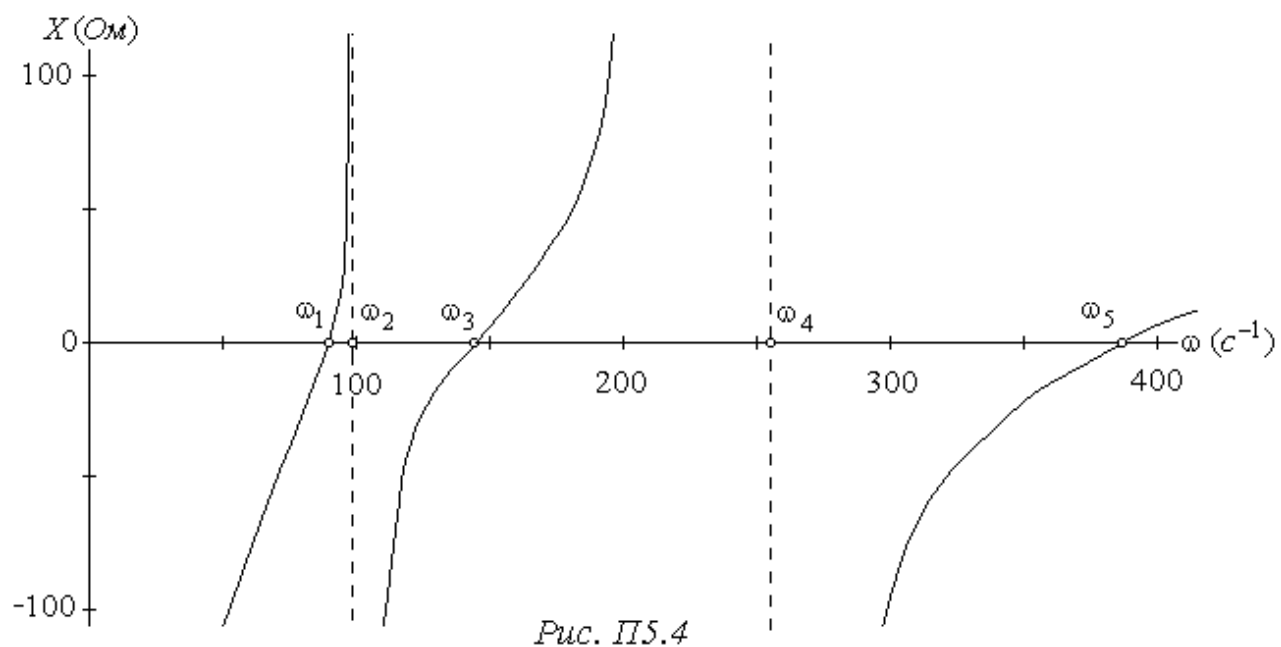
звідки:  $\omega_0 = 0$ , а за коренями біквдратного рівняння ( $t_1 = 9817.92, t_2 =$

$= 65166.1$ ) визначаємо значення частот полюсів частотної характеристики:

$$\omega_2 = +\sqrt{t_1} = \sqrt{9817.92} = 99.08 \text{ (с}^{-1}\text{)}, \quad \omega_4 = +\sqrt{t_2} = \sqrt{65166.1} = 255.28 \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

Підставляючи значення частоти  $\omega$  від 0 до 400 (с<sup>-1</sup>) у рівняння вхідного опору будуємо частотну характеристику реактивного двополюсника *Рис. П5.4*.





## Зміст

|   |    |
|---|----|
| 16. Резонанс в електричних колах.....                                     | 24 |
| 17. Послідовне з'єднання елементів $R$ , $L$ , $C$ . Резонанс напруг..... | 25 |
| 18. Частотні характеристики опорів послідовного контура.....              | 27 |
| 19. Паралельне з'єднання віток $R$ , $L$ і $C$ . Резонанс струмів.....    | 28 |
| Приклад 3.....  | 31 |
| Приклад 4.....  | 32 |
| 20. Частотні характеристики реактивних двополіусників.....                | 34 |
| Приклад 5.....  | 36 |