

21. Взаємна індуктивність в електричних колах.

Зміст

21. Взаємна індуктивність в електричних колах.....	41
22. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	42
23. Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	44
24. Еквівалентні перетворення в колах із взаємоіндуктивністю.....	46
25. Складне електричне коло із взаємоіндуктивністю.....	47
26. Потужність у колах із взаємоіндукцією.....	48
Приклад 6.....	48
Приклад 7.....	53

Між електричним струмом і магнітним потоком існує тісний взаємозв'язок. Змінний струм, протікаючи по контуру, створює змінний магнітний потік. Як-що в цей потік внести провідник, то згідно закону електромагнітної індукції на кінцях провідника виникає електрорушійна сила.

При достатній близькості двох контурів, магнітне поле одного з них впливає на другий контур, і навпаки. Це особливо яскраво видно, в системі двох (намотаних одна на одну) котушок індуктивності. Коли змінюється струм тільки у першій котушці, в другій – наводиться ЕРС

$$e_2 = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

При зміні струму тільки в другій котушці в першій наводиться ЕРС

$$e_1 = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Це явище називають *взаємною індукцією*, а коефіцієнти пропорціональності $M_{12} = M_{21} = M$ називають коефіцієнтами взаємної індукції, або *взаємними індуктивностями*, які, як і власні індуктивності вимірюються у Генрі (Г).

Коли ж струми проходять в обох котушках повне поточозчеплення першої та другої котушок дорівнює алгебраїчній сумі поточозчеплень, обумовлених власною та взаємною індуктивностями.

При складанні рівнянь для магнітозв'язаних кіл необхідно знати *узгоджено* чи, навпаки, *зустрічно* спрямовані потоки само – та взаємоіндукції. Це залежить від напрямку намотки котушок і напрямку струму в них. Нагадаємо, що напрямок магнітного потоку в котушці визначається за правилом правої руки: *якщо правою рукою охопити котушку так щоб чотири пальці показували напрям струму у витках тоді великий палець покаже напрям магнітного потоку.*

Узгоджений режим увімкнення котушок буде в тому випадку, коли при протіканні струмів по котушках їх поточозчеплення само - та взаємоіндукції додаються *Рис. 48,а*. У протилежному випадку потоки віднімаються – *неузгоджений* або *зустрічний* режим включення (*Рис. 49,а*).

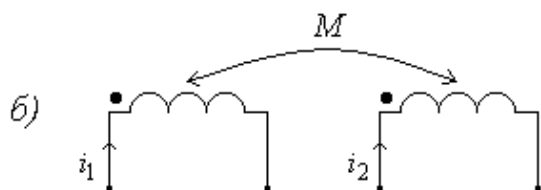
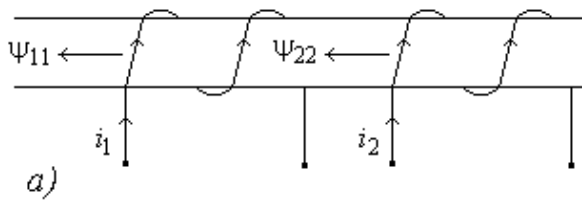


Рис. 48

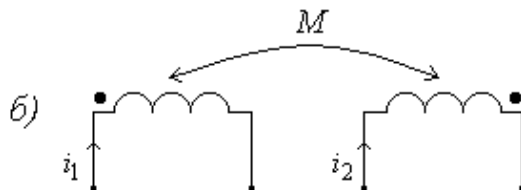
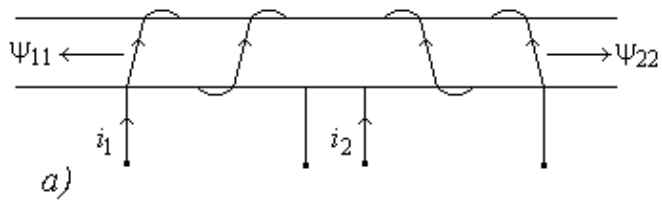


Рис. 49

Два кінці індуктивно-зв'язаних елементів називаються *однойменними*, якщо при однакових напрямках струмів відносно цих кінців потокозчеплення само- та взаємоіндукції у кожному з елементів спрямовані однаково, тобто додаються.

На схемах однойменні кінці взаємозв'язаних котушок позначаються спеціальними значками: точками (•) (Рис. 48, б, Рис. 49, б), зірочками (*) тощо.

По мірі віддалення двох контурів їх магнітний зв'язок зменшується і при достатній відстані взаємоіндуктивність M можна не враховувати. Ступінь магнітного зв'язку між контурами (магнітно-зв'язаними котушками L_1, L_2) характеризується *коефіцієнтом зв'язку* k .

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1, \text{ або } k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{x_M}{\sqrt{x_1 x_2}} \leq 1.$$

ЕРС, які виникають через взаємоіндуктивність обумовлюють додаткові напруги на котушках. Враховуючи, що $M_{12} = M_{21} = M$, переходим до комплексів:

Для того, щоб записати рівняння для напруг перш за все треба задати напрями струмів та напруг (Рис. 50).

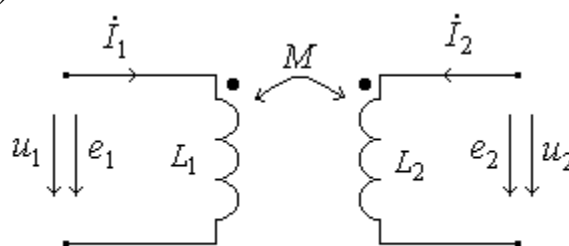


Рис. 50

$$u_1 = u_{1L} + u_{1M}, u_2 = u_{2L} + u_{2M}, e_1 = e_{1L} + e_{1M}, e_2 = e_{2L} + e_{2M}.$$

$$u_{1M} = -e_{1M} = \frac{d\psi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}; \quad u_{2M} = -e_{2M} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}.$$

Якщо струми і напруги – синусоїди для частоти ω , то у комплексній формі ці рівняння записуються так:

$$\dot{U}_{1M} = -\dot{E}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{2M} = -\dot{E}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1;$$

22. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.

На Рис. 51 приведена схема узгодженого увімкнення котушок, струм одна-ково орієнтований (входить в однойменні вузли) відносно відмічених вузлів.

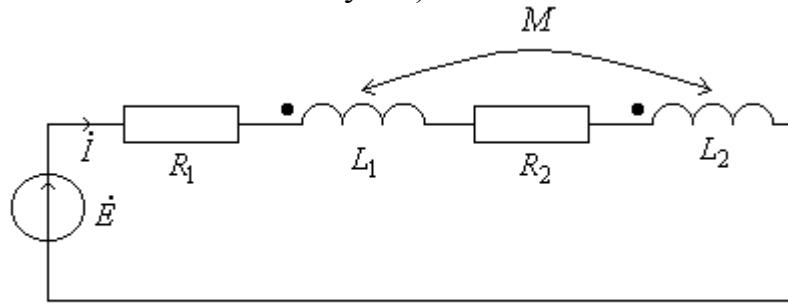


Рис. 51

Рівняння за другим законом Кірхгофа для узгодженого увімкнення:

$$\begin{aligned} \dot{I}R_1 + \dot{I}j\omega L_1 + \dot{I}j\omega M + \dot{I}R_2 + \dot{I}j\omega L_2 + \dot{I}j\omega M &= \dot{E}; \\ \dot{I}[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] &= \dot{E}. \end{aligned}$$

При зустрічному увімкненні напруги взаємоіндукції $\dot{I}j\omega M$ беруться зі знаком мінус

$$\begin{aligned} \dot{I}R_1 + \dot{I}j\omega L_1 - \dot{I}j\omega M + \dot{I}R_2 + \dot{I}j\omega L_2 - \dot{I}j\omega M &= \dot{E}; \\ \dot{I}[R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] &= \dot{E}. \end{aligned}$$

Еквівалентна індуктивність послідовного з'єднання котушок

Узгоджене увімкнення

$$L_{ey} = L_1 + L_2 + 2M$$

Неузгоджене увімкнення

$$L_{e3} = L_1 + L_2 - 2M$$

Еквівалентний реактивний опір послідовного з'єднання котушок

Узгоджене увімкнення

$$\omega L_{ey} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M;$$

$$X_{ey} = X_1 + X_2 + 2X_M.$$

Неузгоджене увімкнення

$$\omega L_{e3} = \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M;$$

$$X_{e3} = X_1 + X_2 - 2X_M.$$

Очевидно, при зустрічному увімкненні еквівалентні індуктивність і реактивний опір будуть менші, ніж при узгодженому. Різниця між еквівалентними індуктивностями узгодженого і зустрічного увімкнення дозволяє визначити взаємоіндуктивність:

$$L_{ey} - L_{e3} = L_1 + L_2 + 2M - (L_1 + L_2 - 2M) = 4M,$$

$$M = \frac{L_{ey} - L_{e3}}{4}.$$

Напруги на котушках мають три складових: напруга на активному опорі $\dot{I}R$, напруга на індуктивному опорі – напруга самоіндукції $\dot{I}j\omega L$ і напруга взаємної індукції $\dot{I}j\omega M$.

Векторні діаграми для послідовного з'єднання індуктивно зв'язаних котушок побудовані для узгодженого режиму на *Рис. 52*, для зустрічного режиму на *Рис. 53*.

В неузгодженому режимі увімкнення можливий випадок, коли напруга на одній із котушок, у даному випадку \dot{U}_2 , відстає від струму – так званий ефект “несправжньої” ємності. Це буває у випадках, коли індуктивність однієї з котушок менша взаємоіндуктивності, тобто коли $L_1 < M$ або $L_2 < M$. Сумарна напруга, яка дорівнює ЕРС \dot{E} на вході, завжди випереджає струм.

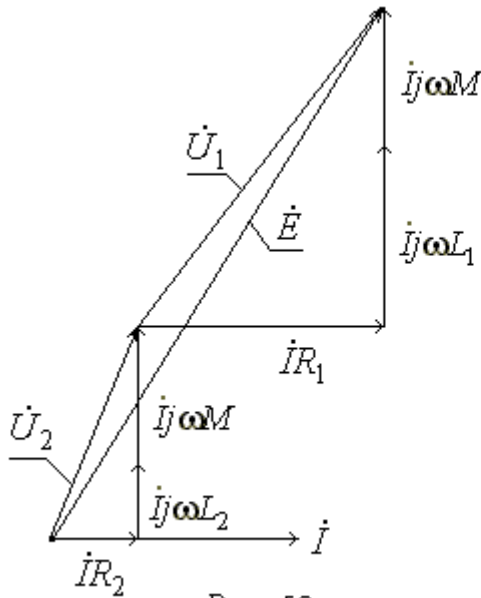


Рис. 52

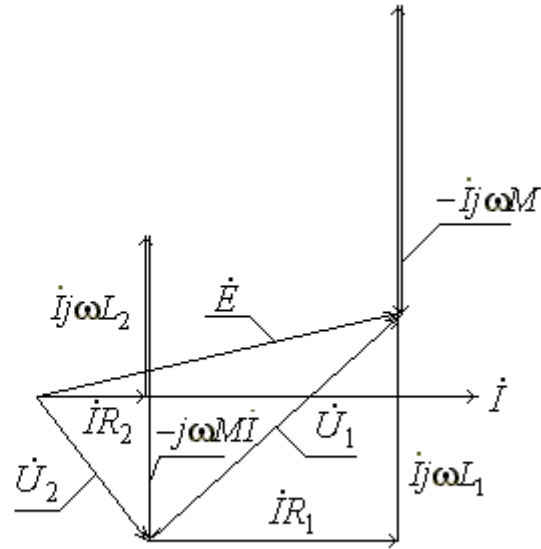


Рис. 53

23. Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.

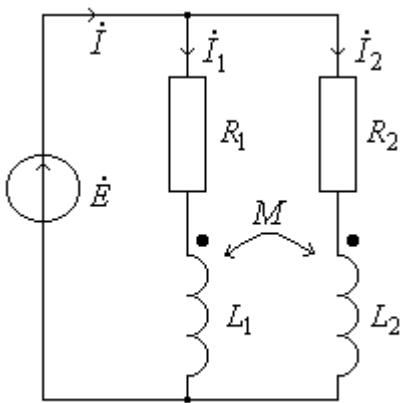


Рис. 54

При паралельному з'єднанні індуктивно зв'язаних котушок також розрізняють узгоджений режим увімкнення – струми входять в однойменні кінці котушок *Рис. 54*, і неузгоджений (зустрічний) режим увімкнення - струми входять в різні кінці котушок.

Опори віток $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jX_{L1}$;

$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_{L2}$.

Опір взаємоіндукції $\underline{Z}_M = j\omega M = jx_M$.

Далі аналіз буде проводитися паралельно для узгодженого та зустрічного режимів.

Для визначення струмів складаються рівняння за законами Кірхгофа.

Узгоджене увімкнення.

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{E} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \dot{E} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \underline{Z}_2. \end{aligned}$$

Зустрічне увімкнення.

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \\ \dot{E} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 - \dot{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \dot{E} &= -\dot{I}_1 \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \underline{Z}_2. \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь, складених за II законом Кірхгофа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_M \\ -\underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E} & \underline{Z}_M \\ \dot{E} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{E}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{E} & -\underline{Z}_M \\ \dot{E} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \dot{E}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{E} \\ \underline{Z}_M & \dot{E} \end{vmatrix} = \dot{E}(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \dot{E} \\ -\underline{Z}_M & \dot{E} \end{vmatrix} = \dot{E}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M);$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \dot{E} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \dot{E} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \dot{E} \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \dot{E} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Еквівалентний вхідний опір:

$$\underline{Z}_{ey} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}.$$

$$\underline{Z}_{es} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}.$$

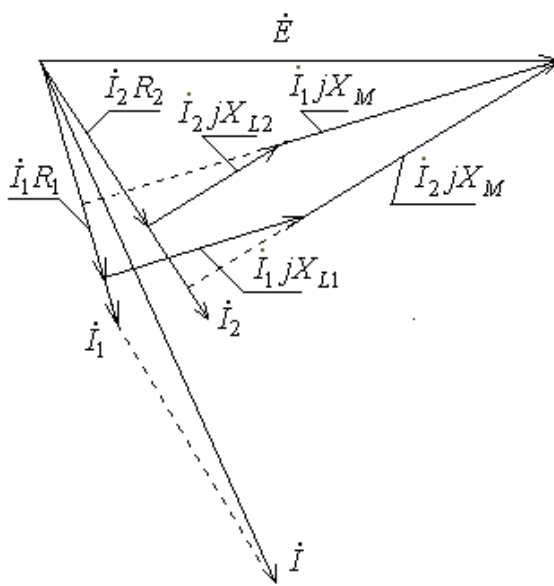


Рис. 55

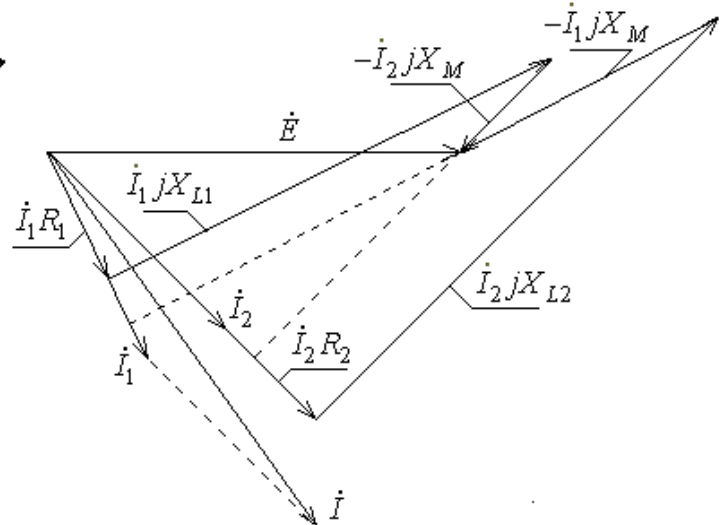


Рис. 56

На *Рис.55, Рис.56* показані векторні діаграми струмів і топографічні ді-аграми напруг, відповідно, для узгодженого та зустрічного режимів увімкнення. Напруги на кожній котушці мають, як і в раніше розглянутому випадку, три складових – напруга на активному опорі, напруга самоіндукції і напруга взаємоіндукції, яка перпендикулярна до струму, що протікає у іншій котушці. В узгодженому режимі напруга взаємоіндукції котушки випереджає струм, що протікає в іншій котушці, в неузгодженому режимі – відстає від нього. Сума всіх складових напруг кожної з котушок згідно II закону Кірхгофа дорівнює ЕРС \dot{E} .

24. Еквівалентні перетворення в колах із взаємоіндуктивністю.

Аналіз і розрахунок електричних кіл у багатьох випадках значно спрощується, якщо частину кола, яка має індуктивні зв'язки, замінити еквівалентною схемою без індуктивних зв'язків. Цей засіб називають еквівалентною заміною, усуненням або *розв'язком індуктивних зв'язків*.

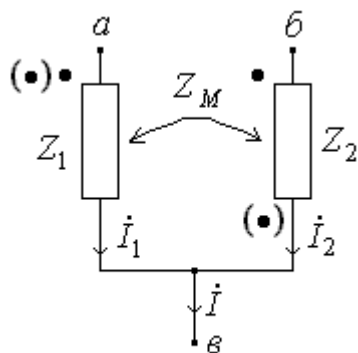


Рис. 57

Для електричного кола з індуктивним зв'язком між елементами *Рис. 57*, що має параметри;

$$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_M = jX_M,$$

паралельно робим аналіз для обох режимів.

Узгоджений режим увімкнення.

$$\begin{aligned} \dot{U}_{a\delta} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \dot{U}_{\delta\delta} &= \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{I}_1 \underline{Z}_M; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \\ \dot{U}_{a\delta} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + (\dot{I} - \dot{I}_1) \underline{Z}_M = \\ &= \dot{I}_1 (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) + \dot{I} \underline{Z}_M; \\ \dot{U}_{\delta\delta} &= \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + (\dot{I} - \dot{I}_2) \underline{Z}_M = \\ &= \dot{I}_2 (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + \dot{I} \underline{Z}_M; \end{aligned}$$

Зустрічний режим увімкнення.

$$\begin{aligned} \dot{U}_{a\delta} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 - \dot{I}_2 \underline{Z}_M; \\ \dot{U}_{\delta\delta} &= \dot{I}_2 \underline{Z}_2 - \dot{I}_1 \underline{Z}_M; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2. \\ \dot{U}_{a\delta} &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 - (\dot{I} - \dot{I}_1) \underline{Z}_M = \\ &= \dot{I}_1 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_M) - \dot{I} \underline{Z}_M; \\ \dot{U}_{\delta\delta} &= \dot{I}_2 \underline{Z}_2 - (\dot{I} - \dot{I}_2) \underline{Z}_M = \\ &= \dot{I}_2 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_M) - \dot{I} \underline{Z}_M; \end{aligned}$$

Із аналізу виведених формул для напруг $\dot{U}_{a\delta}, \dot{U}_{\delta\delta}$ видно, що після розв'язку магнітного зв'язку для узгодженого включення послідовно з елементами $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ ввімкнені зі знаком "мінус" опори \underline{Z}_M , тобто $-\underline{Z}_M = -jX_M$ - формально аналогічно ємнісному опорі. Після вузла ввімкнений опір \underline{Z}_M . Для неузгодженого режиму знаки опоры \underline{Z}_M міняються на протилежні. Схеми заміщення для узгодженого і зустрічного режимів показані відповідно на *Рис. 58, 59*.

При застосуванні розв'язку потрібно знати лише, як приєднані котушки до спільного вузла. Якщо вони приєднані до спільного вузла (ϵ) однойменними кінцями, то послідовно з котушками до вузла (ϵ') вмикаються ємнісні опори $-\underline{Z}_M$, а після вузла (ϵ') індуктивний опір \underline{Z}_M (Рис. 58). Якщо до спільного вузла котушки приєднані різнойменними кінцями – розв'язок показаний на Рис. 59.

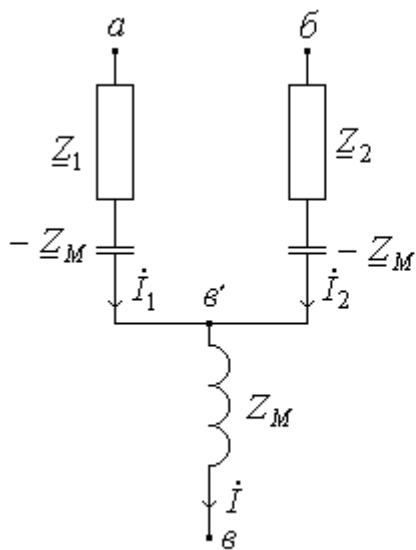


Рис. 58

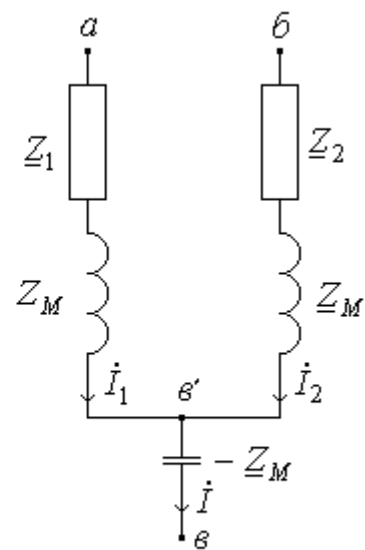


Рис. 59

25. Складне електричне коло із взаємоіндуктивністю.

Розрахунки складних електричних кіл проводяться методом рівнянь Кірх-гофа або методом контурних струмів.

Складання рівнянь за методом контурних струмів.

Загальний вигляд рівнянь, складених за методом контурних струмів, для двоконтурного кола

$$\dot{I}_{11} \underline{Z}_{11} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{12} = \dot{E}_{11};$$

$$\dot{I}_{11} \underline{Z}_{21} + \dot{I}_{22} \underline{Z}_{22} = \dot{E}_{22}.$$

Для кола, зображеного на Рис. 60 при заданих напрямках контурних струмів,

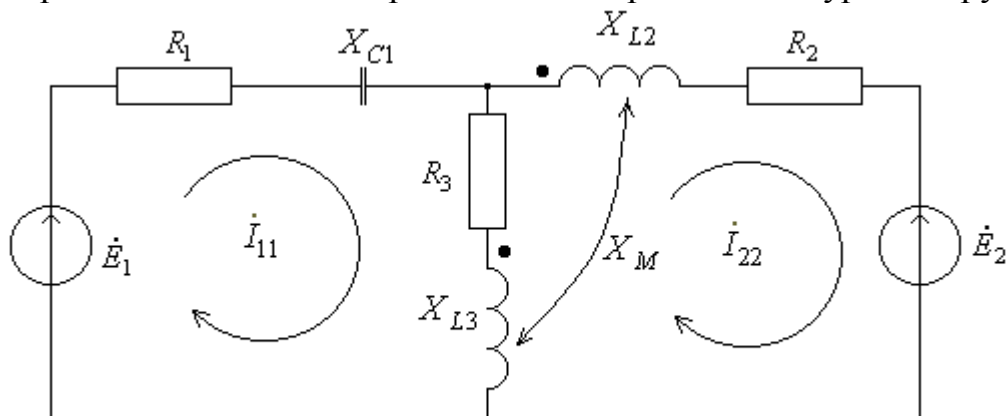


Рис. 60

власні та взаємні опори визначаються як звичайно, і додатково треба враховувати опори, які з'являються за рахунок взаємоіндукції. Для другого контурного струму котушки з'єднані послідовно зустрічно, тому у власний опір другого контура додається опір взаємоіндукції $-j2X_M$. Крім того до спільного опору між контурами додається опір взаємоіндукції, знак якого залежить від того, як орієнтовані контурні струми відносно однойменних кінців кожної з котушок. Так I_{11} входить в котушку X_{L3} , а струм I_{22} в котушку X_{L2} в однойменні кінці (в точку), тому у взаємний опір додається jX_M .

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + j(-X_{C1} + X_{L3}); \quad \underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + j(X_{L2} + X_{L3} - 2X_M);$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(R_3 + jX_{L3}) + jX_M = -(R_3 + jX_{L3} - jX_M); \quad \dot{E}_{11} = \dot{E}_1; \quad \dot{E}_{22} = -\dot{E}_2.$$

26. Потужність у колах із взаємоіндукцією.

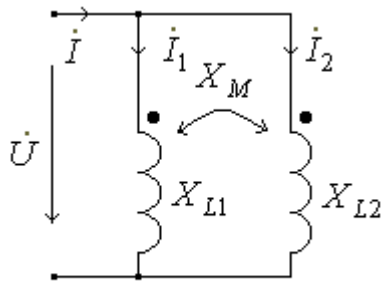


Рис. 61

Комплексна потужність, обумовлена магнітним зв'язком x_M між елементами (котушками) X_{L1}, X_{L2}

$$\tilde{S}_M = \tilde{S}_{M1} + \tilde{S}_{M2}$$

$$\tilde{S}_{M1} = \dot{U}_{M1} I_1^* = jX_M \dot{I}_2 I_1^* = P_{M1} + jQ_{M1};$$

$$\tilde{S}_{M2} = \dot{U}_{M2} I_2^* = jX_M \dot{I}_1 I_2^* = P_{M2} + jQ_{M2}.$$

Сумарна активна потужність за рахунок магнітного зв'язку

$$P_M = P_{M1} + (-P_{M2}) = 0.$$

Реактивна потужність взаємоіндукції однакова в обох котушках. Сумарна реактивна потужність за рахунок магнітного зв'язку для узгодженого напрямку струмів (Рис. 61):

$$Q_M = Q_{M1} + Q_{M2} = 2Q_{M1} = 2Q_{M2} = 2x_M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = 2 \operatorname{Im}(\dot{U}_{M1} \dot{I}_1^*)$$

Для неузгодженого режиму знаки у формулах для Q_{M1}, Q_{M2} змінюються на протилежні.

Приклад 6.

У колі (Рис. П6.1) коефіцієнт зв'язку між елементами X_{L1}, X_{L2} : $k = 0.65$. Параметри кола показані на схемі, - ЕРС у Вольтах, опори в Омах.

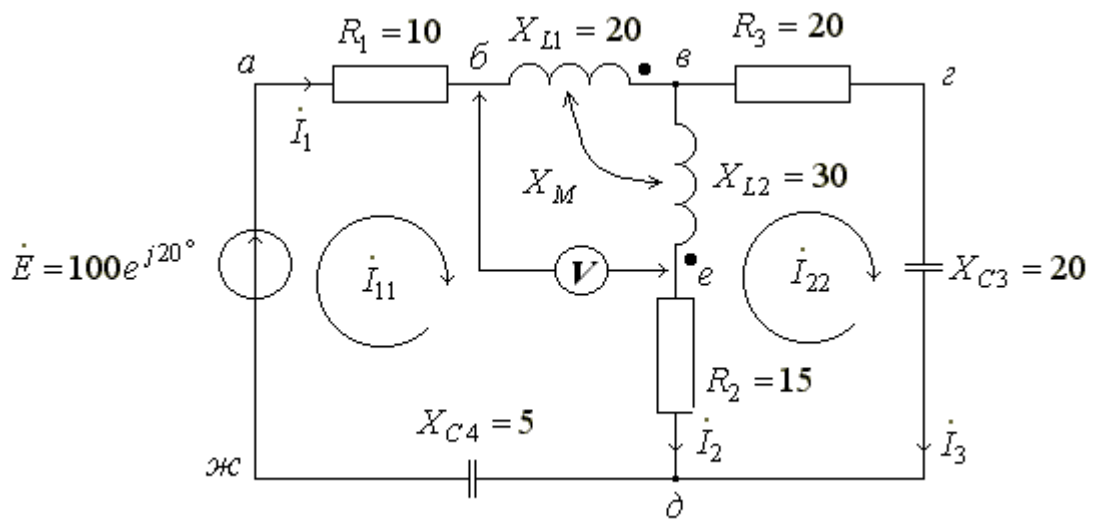


Рис. П6.1

Розрахувати струми у вітках, перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей, визначити покази вольметра, активну P_M і реактивну Q_M потужності магнітного зв'язку. Побудувати сумісну векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг (на діаграмі показати напруги взаємної індукції).

Розрахунок проводиться методом контурних струмів. За вибраними напрямками контурних струмів складаються рівняння. Оскільки для контурного струму \dot{I}_{11} магнітозв'язані елементи X_{L1} , X_{L2} з'єднані послідовно узгоджено, у власний опір першого контура входить складова $j2x_M$. Струми \dot{I}_{11} і \dot{I}_{22} входять відповідно в різнойменні кінці елементів X_{L1} , X_{L2} (неузгоджене увімкнення), тому у взаємному опорі буде складова $-jX_M$.

Опір взаємоіндуктивності $X_M = k\sqrt{X_{L1}X_{L2}} = 0.65\sqrt{20 \cdot 30} = 15.92$ (Ом).

$$\dot{I}_{11}[R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - X_{C4} + 2X_M)] - \dot{I}_{22}[R_2 + j(X_{L2} + X_M)] = \dot{E};$$

$$-\dot{I}_{11}[R_2 + j(X_{L2} + X_M)] + \dot{I}_{22}[R_3 + R_2 + j(X_{L2} - X_{C3})] = 0.$$

$$\dot{I}_{11}[10 + 15 + j(20 + 30 - 5 + 2 \cdot 15.92)] - \dot{I}_{22}[15 + j(30 + 15.92)] = 100e^{j20^\circ};$$

$$-\dot{I}_{11}[15 + j(30 + 15.92)] + \dot{I}_{22}[20 + 15 + j(30 - 20)] = 0.$$

$$\dot{I}_{11}(25 + j76.84) - \dot{I}_{22}(15 + j45.92) = 100e^{j20^\circ};$$

$$-\dot{I}_{11}(15 + j45.92) + \dot{I}_{22}(35 + j10) = 0.$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} 80.80 e^{j71.98^\circ} - \dot{I}_{22} 48.31 e^{j71.91^\circ} &= 100 e^{j20^\circ}; \\ -\dot{I}_{11} 48.31 e^{j71.91^\circ} + \dot{I}_{22} 36.40 e^{j15.95^\circ} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 80.80 e^{j71.98^\circ} & -48.31 e^{j71.91^\circ} \\ -48.31 e^{j71.91^\circ} & 36.40 e^{j15.95^\circ} \end{vmatrix} = 2941.12 e^{j87.93^\circ} - 2333.86 e^{j143.82^\circ} = \\ &= 106.23 + j2939.20 - (-1883.81 + j1377.73) = 1990.04 + j1561.47 = \\ &= 2529.52 e^{j38.12^\circ}; \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100 e^{j20^\circ} & -48.31 e^{j71.91^\circ} \\ 0 & 36.40 e^{j15.95^\circ} \end{vmatrix} = 3640 e^{j35.95^\circ};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 80.80 e^{j71.98^\circ} & 100 e^{j20^\circ} \\ -48.31 e^{j71.91^\circ} & 0 \end{vmatrix} = 4831 e^{j91.91^\circ}.$$

Контурні струми:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3640 e^{j35.95^\circ}}{2529.52 e^{j38.12^\circ}} = 1.439 e^{-j2.17^\circ} (A),$$

$$\dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4831 e^{j91.91^\circ}}{2529.52 e^{j38.12^\circ}} = 1.910 e^{j53.79^\circ} (A).$$

Струми у вітках:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 1.439 e^{-j2.17^\circ} (A); \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = 1.910 e^{j53.79^\circ} (A);$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} = 1.439 e^{-j2.17^\circ} - 1.910 e^{j53.79^\circ} = 1.438 - j5.45 \cdot 10^{-2} - \\ &= (1.128 + j1.541) = 0.31 - j1.60 = 1.625 e^{-j79.03^\circ} (A). \end{aligned}$$

Правильність розрахунків перевіряється за балансом потужностей.
Потужність джерела (генератора):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{дж} &= \dot{E} \dot{I}_1^* = 100 e^{j20^\circ} 1.439 e^{j2.17^\circ} = 143.9 e^{j22.17^\circ} = \underbrace{133.26}_{P_{дж}} + j \underbrace{54.30}_{Q_{дж}} \\ P_{дж} &= 133.26 (Вт), \quad Q_{дж} = 54.30 (ВАр). \end{aligned}$$

Потужність споживача складається із активної P_{cn} , реактивної Q_{cn} потужностей та потужності взаємної індукції Q_M .

Потужність взаємної індукції на першій котушці:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{M1} &= \dot{U}_{M1} I_1^* = \underbrace{jx_M \dot{I}_2^*}_{\dot{U}_{M1}} I_1^* = 15.92 e^{j90^\circ} 1.625 e^{-j79.03^\circ} 1.439 e^{j2.17^\circ} = 37.23 e^{j13.14^\circ} = \\ &= \underbrace{36.26}_{P_{M1}} + j \underbrace{8.46}_{Q_{M1}}. \quad \underline{P_{M1} = 36.26 (Вт)}, \quad \underline{Q_{M1} = 8.46 (ВАр)}.\end{aligned}$$

Потужність взаємоіндукції на другій котушці:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{M2} &= \dot{U}_{M2} I_2^* = \underbrace{jx_M \dot{I}_1^*}_{\dot{U}_{M2}} I_2^* = 15.92 e^{j90^\circ} 1.439 e^{-j2.17^\circ} 1.625 e^{j79.03^\circ} = 37.23 e^{j166.86^\circ} = \\ &= \underbrace{-36.26}_{P_{M2}} + j \underbrace{8.46}_{Q_{M2}}. \quad \underline{P_{M2} = -36.26 (Вт)}, \quad \underline{Q_{M2} = 8.46 (ВАр)}.\end{aligned}$$

Активна потужність взаємоіндукції дорівнює нулю:

$$P_M = P_{M1} + P_{M2} = 36.26 - 36.26 = 0.$$

Реактивна потужність взаємоіндукції :

$$\begin{aligned}Q_M &= Q_{M1} + Q_{M2} = 8.46 + 8.46 = 16.92 (ВАр), \text{ або} \\ Q_M &= 2Q_{M1} = 2x_M \cdot I_1 \cdot I_2 \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}).\end{aligned}$$

Активна потужність споживача виділяється на активних опорах:

$$\begin{aligned}P_{cn} &= P_1 + P_2 + P_3 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = \\ &= 1.439^2 \cdot 10 + 1.625^2 \cdot 15 + 1.910^2 \cdot 20 = 133.28 (Вт), \quad \underline{P_{cn} = 133.28 (Вт)},\end{aligned}$$

Реактивна потужність споживача визначається на реактивних опорах:

$$\begin{aligned}Q' &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1^2 (x_{L1} - x_{C4}) + I_2^2 x_{L2} - I_3^2 x_{C3} = \\ &= 1.439^2 (20 - 5) + 1.625^2 \cdot 30 - 1.910^2 \cdot 20 = 37.32 (ВАр).\end{aligned}$$

Загальна реактивна потужність споживача:

$$Q_{cn} = Q' + Q_M = 37.32 + 16.92 = 54.24 (ВАр).$$

Похибка в розрахунку активної і реактивної потужностей складає соті долі процента.

Вольтметр, увімкнений між точками *b*, *e*, покаже модуль комплексу напруги \dot{U}_{be} , що визначається за розрахованими струмами і заданими параметрами.

Правильність розрахунків перевіряється за двома незалежними шляхами.

Шлях I.

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{\bar{b}e} &= \dot{U}_{\bar{b}b} + \dot{U}_{\bar{b}e} = \underbrace{\dot{I}_1 jX_{L1} + \dot{I}_2 jX_M}_{\dot{U}_{\bar{b}b}} + \underbrace{\dot{I}_2 jX_{L2} + \dot{I}_1 jX_M}_{\dot{U}_{\bar{b}e}} = \\
&= 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 20 e^{j90^\circ} + 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 15.92 e^{j90^\circ} + \\
&+ 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 30 e^{j90^\circ} + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 15.92 e^{j90^\circ} = \\
&= 28.78 e^{j87.83^\circ} + 25.87 e^{j10.97^\circ} + 48.75 e^{j10.97^\circ} + 22.91 e^{j87.83^\circ} = \\
&= 1.09 + j28.76 + 25.40 + j4.92 + 47.86 + j9.28 + 0.87 + j22.89 = \\
&= 75.22 + j65.85 = 99.97 e^{j41.22^\circ} \text{ (В)}.
\end{aligned}$$

Шлях II.

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{\bar{b}e} &= \dot{U}_{\bar{b}a} + \dot{E} + \dot{U}_{\bar{ж}d} + \dot{U}_{\bar{d}e} = -\dot{I}_1 R_1 + \dot{E} - \dot{I}_1 (-jX_{C4}) - \dot{I}_2 R_2 = \\
&= -1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 10 + 100 e^{j20^\circ} - 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 5 e^{-j90^\circ} - 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 15 = \\
&= -14.39 e^{-j2.17^\circ} + 100 e^{j20^\circ} - 7.195 e^{-j92.17^\circ} - 24.375 e^{-j79.03^\circ} = \\
&= -(14.379 - j0.545) + 93.97 + j34.20 - (-0.272 - j7.19) - (4.64 - j23.93) = \\
&= 75.22 + j65.86 = 99.98 e^{j41.20^\circ} \text{ (В)}.
\end{aligned}$$

Похибка у визначенні показів вольтметра складає 0.01 (В).

Дані для побудови топографічної діаграми.

Увага! На елементах X_{L1}, X_{L2} напруги мають дві складові – напруги самоіндукції і напруги взаємоіндукції.

Потенціал точки *ж* приймаємо за нульовий $\phi_{\bar{ж}} = 0$, і відносно нього визначаємо комплексні потенціали всіх інших точок кола.

$$\dot{\phi}_d = \dot{\phi}_{жс} + \dot{I}_1(-jX_{C4}) = 0 + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 5 e^{-j90^\circ} = 7.195 e^{-j92.17^\circ} = (-0.272 - j7.19)(B),$$

$$\dot{\phi}_e = \dot{\phi}_d + \dot{I}_2 R_2 = 7.195 e^{-j92.17^\circ} + 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 15 = 31.42 e^{-j82.01^\circ} = (4.37 - j31.12)(B),$$

$$\dot{\phi}_в = \dot{\phi}_e + \dot{I}_2 jX_{L2} + \dot{I}_1 jX_M = 31.42 e^{-j82.01^\circ} + 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 30 e^{j90^\circ} + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 15.92 e^{j90^\circ} = 53.10 e^{j1.14^\circ} = (53.09 + j1.05)(B),$$

$$\dot{\phi}_б = \dot{\phi}_в + \dot{I}_1 jX_{L1} + \dot{I}_2 jX_M = 53.10 e^{j1.14^\circ} + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 20 e^{j90^\circ} + 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 15.92 e^{j90^\circ} = 86.83 e^{j23.58^\circ} = (79.58 + j34.74)(B),$$

$$\dot{\phi}_а = \dot{\phi}_б + \dot{I}_1 R_1 = 86.83 e^{j23.58^\circ} + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 10 = 100 e^{j20^\circ} = (93.97 + j34.20)(B),$$

$$\dot{\phi}_з = \dot{\phi}_d + \dot{I}_3(-jX_{C3}) = 7.195 e^{-j92.17^\circ} + 1.91 e^{j53.79^\circ} \cdot 20 e^{-j90^\circ} = 42.65 e^{-j44.25^\circ} = (30.55 - j29.76)(B).$$

Комплексні напруги між відповідними точками згідно розрахованих потенціалів:

$$\dot{U}_{джс} = \dot{\phi}_d - \dot{\phi}_{жс} = \dot{I}_1(-jx_4) = 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 5 e^{-j90^\circ} = 7.195 e^{-j92.17^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{ед} = \dot{\phi}_в - \dot{\phi}_d = \dot{I}_2 R_2 = 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 15 = 24.375 e^{-j79.03^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{ев} = \dot{\phi}_в - \dot{\phi}_e = \dot{I}_2 jx_2 + \dot{I}_1 jx_M = 1.625 e^{-j79.03^\circ} \cdot 30 e^{j90^\circ} + 1.439 e^{-j2.17^\circ} \times 15.92 e^{j90^\circ} = 48.75 e^{j10.97^\circ} + 22.91 e^{j87.83^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{бв} = \dot{\phi}_б - \dot{\phi}_e = \dot{I}_1 jx_1 + \dot{I}_2 jx_M = 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 20 e^{j90^\circ} + 1.625 e^{-j79.03^\circ} \times 15.92 e^{j90^\circ} = 28.78 e^{j87.83^\circ} + 25.87 e^{j10.97^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{аб} = \dot{\phi}_а - \dot{\phi}_б = \dot{I}_1 R_1 = 1.439 e^{-j2.17^\circ} \cdot 10 = 14.39 e^{-j2.17^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{зд} = \dot{\phi}_з - \dot{\phi}_d = \dot{I}_3(-jx_3) = 1.91 e^{j53.79^\circ} \cdot 20 e^{-j90^\circ} = 38.2 e^{-j36.21^\circ} (B),$$

$$\dot{U}_{ез} = \dot{\phi}_в - \dot{\phi}_з = \dot{I}_3 R_3 = 1.91 e^{j53.79^\circ} \cdot 20 = 38.2 e^{j53.79^\circ} (B).$$

За розрахованими даними на *Рис. П6.2* побудована сумісна векторна діаграма струмів і топографічна діаграма напруг.

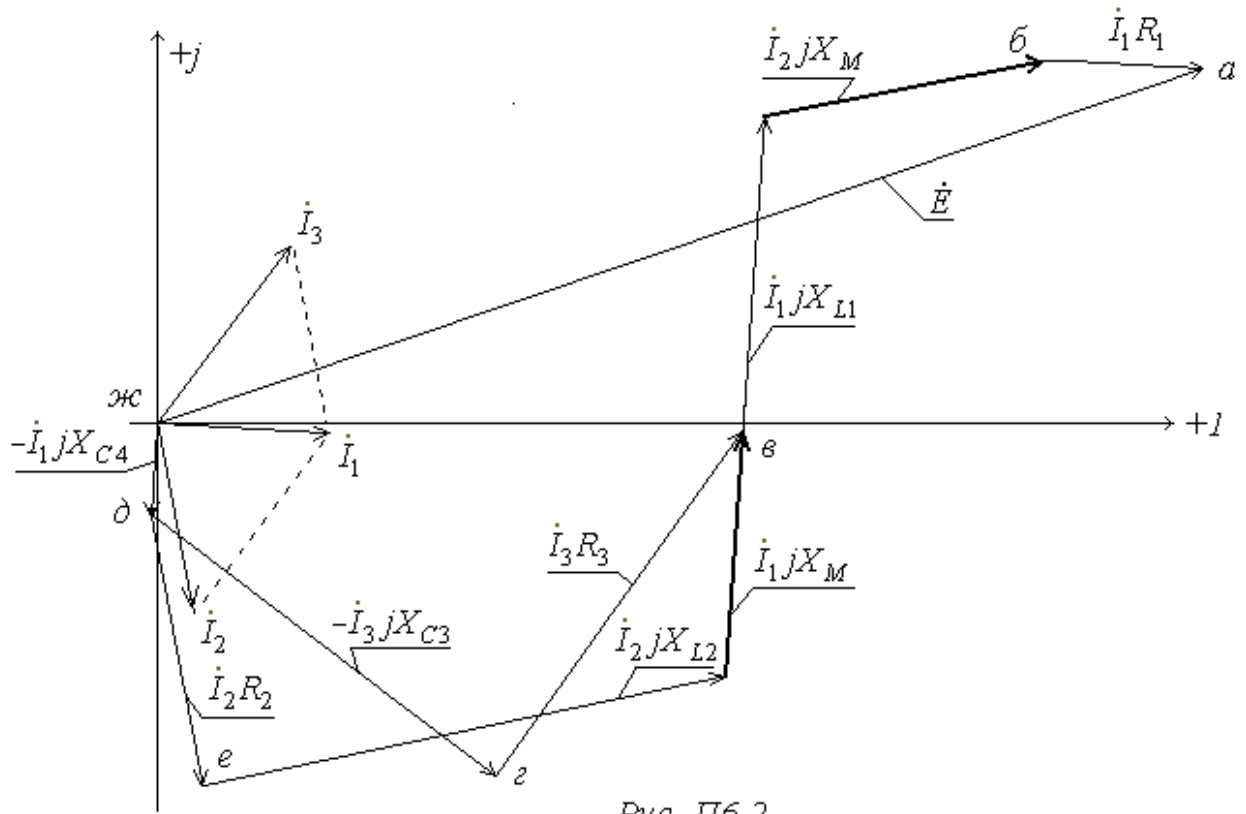


Рис. П6.2

Приклад 7.

Комплексна напруга $\dot{U} = 120(V)$ прикладена до електричного кола (Рис. П7) з параметрами:

$R = 40(Ом), L_1 = 0.2(Гн), L_2 = 0.3(Гн), L_3 = 0.1(Гн), L_4 = 0.4(Гн), M_{12} = 0.2(Гн),$
 $M_{34} = 0.15(Гн), C = 25 \cdot 10^{-6}(\Phi).$

Кутова частота напруги $\omega = 400(c^{-1}).$

Визначити покази вольтметра.

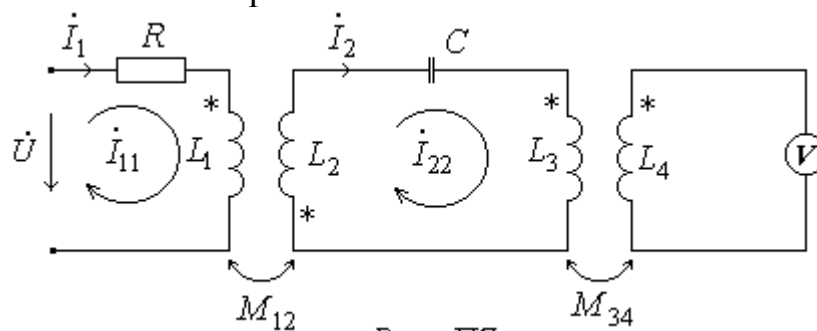


Рис. П7

У даному колі три контури. Опір ідеального вольтметра дорівнює нескінченності, тому в контурі з вольтметром струму не буде, він покаже напругу взаємоіндукції, яка визначається струмом \dot{I}_2 у другому контурі та опором взаємоіндукції $j\omega M_{34}$ між другим та третім контурами.

$$V = |\dot{E}| = |\dot{I}_2 j\omega M_{34}|.$$

Розв'язок задачі зводиться до визначення струму у другому контурі, для чого застосовується метод контурних струмів. Спочатку визначаються опори елементів кола:

$$\begin{aligned} X_{L1} &= \omega L_1 = 400 \cdot 0.2 = 80(\text{Ом}); & X_{L2} &= \omega L_2 = 400 \cdot 0.3 = 120(\text{Ом}); \\ X_{L3} &= \omega L_3 = 400 \cdot 0.1 = 40(\text{Ом}); & X_{L4} &= \omega L_4 = 400 \cdot 0.4 = 160(\text{Ом}); \\ X_{M12} &= \omega M_{12} = 400 \cdot 0.2 = 80(\text{Ом}); & X_{M34} &= \omega M_{34} = 400 \cdot 0.15 = 60(\text{Ом}); \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{400 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = 100(\text{Ом}). \end{aligned}$$

Задаємося однаковим напрямом контурних струмів в кожному з контурів (за годинниковою стрілкою), і складаємо рівняння за методом контурних струмів:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{22} &= \dot{E}_{k1}, \\ \underline{Z}_{21} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{22} &= E_{k2}. \end{aligned}$$

де:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= R + jX_{L1} = 40 + j80; & \underline{Z}_{22} &= jX_{L2} + jX_{L3} - jX_C = j120 + j40 - j100 = j60; \\ \underline{Z}_{12} &= jX_M = j80; & \dot{E}_{k1} &= \dot{U} = 120; & \dot{E}_{k2} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (40 + j80) \dot{I}_{11} + j80 \dot{I}_{22} &= 120; \\ j80 \dot{I}_{11} + j60 \dot{I}_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Визначники системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 40 + j80 & j80 \\ j80 & j60 \end{vmatrix} = 1600 + j2400 = 2884.44 \angle 56.31^\circ; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 120 & j80 \\ 0 & j60 \end{vmatrix} = j7200 = 7200 \angle 90^\circ; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 40 + j80 & 120 \\ j80 & 0 \end{vmatrix} = -j9600 = 9600 \angle -90^\circ. \end{aligned}$$

Контурні струми:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} = \dot{I}_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7200 \angle 90^\circ}{2884.44 \angle 24.78^\circ} = 2.5 \angle 33.69^\circ (\text{А}); \\ \dot{I}_{22} = \dot{I}_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9600 \angle -90^\circ}{2884.44 \angle 24.78^\circ} = 3.33 \angle -146.31^\circ (\text{А}). \end{aligned}$$

Перевірка правильності розрахунків за балансом потужностей.

Потужність генератора:

$$\tilde{S}_2 = \dot{U} \cdot I_{11}^* = 120 \cdot 2.5 \angle -33.69^\circ = 300 \angle -33.69^\circ = 249.62 - j166.41;$$

$$P_2 = 249.62(\text{Вт}), \quad Q_2 = -166.41(\text{ВАр}).$$

Потужність споживача:

$$P_{cn} = I_{11}^2 \cdot R = 2.5^2 \cdot 40 = 250(\text{Вт});$$

$$Q_{cn} = Q' + Q_m = I_{11}^2 \cdot X_{L1} + I_{22}^2 \cdot (X_{L2} - X_{C3} + X_{L2}) + 2 \cdot I_{11} \cdot I_{22} \cdot X_{M12} \cos(\psi_{i1} - \psi_{i2}) =$$

$$= 2.5^2 \cdot 80 + 3.33^2 \cdot (120 - 100 + 40) + 2 \cdot 2.5 \cdot 3.33 \cdot 80 \cos(33.69^\circ - (-146.31^\circ)) =$$

$$= 1165.33 - 1332 = -166.67(\text{ВАр}).$$

Баланс зійшовся з достатньою точністю.

Визначення показів вольтметра:

$$\dot{U}_v = \dot{I}_{22} \cdot jX_{M34} = 3.33 \angle -146.31^\circ \cdot 60 \angle 90^\circ = 199.8 \angle -56.31^\circ (\text{В}).$$

$$\underline{V = 199.8 (\text{В})}$$

Зміст

21. Взаємна індуктивність в електричних колах.....	41
22. Послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	42
23. Паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок.....	44
24. Еквівалентні перетворення в колах із взаємоіндуктивністю.....	46
25. Складне електричне коло із взаємоіндуктивністю.....	47
26. Потужність у колах із взаємоіндукцією.....	48
Приклад 6.....	48
Приклад 7.....	53