

## Лабораторна робота № 64

### ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ МІЖ ДВОМА ПЛОСКИМИ КОТУШКАМИ З ЕЛЕКТРИЧНИМИ СТРУМАМИ

#### Мета роботи

Ознайомлення з методом вимірювання механічної сили взаємодії двох плоских коаксіальних котушок зі струмами.

З'ясування впливу різних чинників (струму, відстані між котушками та ін.) на силу взаємодії.

Порівняння результатів вимірювань з результатами розрахунку механічної сили взаємодії двох плоских коаксіальних котушок зі струмами.

#### Підготовка до роботи

Готуючись до роботи, необхідно:

1. Скласти протокол звіту з лабораторної роботи.
2. Ознайомитися з робочим завданням і методичними вказівками; відповісти на наступні питання:
  - а) чому для стійкої рівноваги вагів, що вимірюють силу взаємодії, використовується сила відштовхування котушок?
  - б) від чого залежить коефіцієнт взаємоіндукції двох плоских котушок?
  - в) чому запропонований метод дослідження застосовується тільки для плоских котушок?
  - г) як виконується графічне диференціювання кривої  $M = \Psi(x)$ ?
  - д) які основні рівняння, що описують стаціонарне магнітне поле?
  - е) як виразити потік взаємної індукції через векторний магнітний потенціал?

#### Опис лабораторної установки

Вимірювання електромагнітної сили здійснюється за допомогою вагів (коромислових чи електронних).

Обидві котушки розташовані горизонтально. Перша з них жорстко пов'язана з вагами. Друга котушка, залишаючись нерухомою під час кожного вимірювання, розташована вище першої і може вільно переміщуватись у вертикальному напрямі так, що стає можливим змінювати відстань між котушками.

Живлення лабораторної установки (рис. 64.1) здійснюється від джерела постійного струму.

Для стійкої рівноваги терезів, що вимірюють силу взаємодії, використовується сила відштовхування котушок, коли струми в котушках мають протилежні напрями. Котушки з'єднані послідовно, так що значення струмів у них однакові. Установка містить амперметр для вимірювання струму і реостат для регулювання струму і підтримання його заданого значення.

### Порядок виконання роботи

1. Скласти схему згідно рис. 64.1.

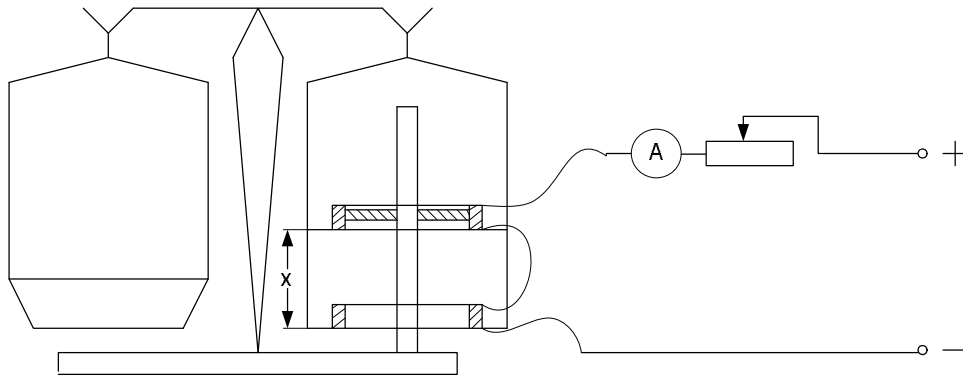


Рис. 64.1

2. Встановити струм  $I_1 = 1 \text{ A}$  і виміряти електромеханічну силу  $F$  для різних відстаней  $x$  між котушками.
3. Те ж для струмів  $I_2 = 1,2 \text{ A}$ ,  $I_3 = 1,5 \text{ A}$ ,  $I_4 = 1,7 \text{ A}$ ,  $I_5 = 2 \text{ A}$ .
4. Результати вимірювань занести в таблицю 64.1.

Таблиця 64.1

$x$ , мм	$F$ , гс				
	$I_1 = 1 \text{ A}$	$I_2 = 1,2 \text{ A}$	$I_3 = 1,5 \text{ A}$	$I_4 = 1,7 \text{ A}$	$I_5 = 2 \text{ A}$
15					
25					
35					
45					
55					
65					
75					
85					
95					
105					

### Обробка результатів експерименту

1. Побудувати в одній системі координат криві  $F = f(x)$  залежності сили від відстані між котушками для кожного значення струму.
2. Розрахувати і побудувати теоретичні криві  $F = f(x)$ , порівняти їх з отриманими експериментально.
3. За даними вимірювань побудувати криві  $F = f(I)$  залежності сили від струму для різних відстаней  $x$  між котушками.
4. Зробити і записати в протокол звіту висновки з виконаної роботи..

### Методичні вказівки

Електромагнітна сила, яка намагається змінити певну геометричну координату системи контурів з електричними струмами, у припущенні незмінності струмів виражається формулою

$$F = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{i_k = \text{const}},$$

де  $W_m$  – енергія контурів зі струмами;  $g$  – геометрична координата, що визначає просторове положення контурів.

Повна енергія системи, що складається з двох контурів зі струмами:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \cdot i_1 i_2.$$

Припустимо, що контури жорсткі, тобто  $L_1 = \text{const}$  і  $L_2 = \text{const}$ , і струми в контурах незмінні, причому може змінюватися тільки координата  $x$ , що визначає відстань між контурами (катушками).

Від цієї координати залежить лише взаємна індуктивність  $M$ . У такому разі сила взаємодії контурів

$$F = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (64.1)$$

Електромагнітна сила суттєво залежить від відстані  $x$  між катушками. У разі збільшення  $x$  вона спадає, а у разі зменшення  $x$  зростає.

Оскільки  $\frac{\partial M}{\partial x} < 0$ , то при однакових напрямках струмів, тобто при  $i_1 = i_2 = i$  сила  $F < 0$  і намагається зменшити координату  $x$ , отже катушки притягуються. У разі протилежних напрямів струмів, тобто при  $i_1 = -i_2 = i$  сила  $F > 0$  і намагається збільшити координату  $x$ , отже катушки відштовхуються.

При експериментальному дослідженні взаємодії катушок вимірюється сила відштовхування через те, що тільки так можливо забезпечити стійку рівновагу терезів.

З формули (64.1) видно, що для розрахунку сили взаємодії контурів залежно від координати  $x$  необхідно знати функцію  $M = \Psi(x)$ .

Знайдемо взаємну індуктивність двох колових контурів, розташованих у паралельних площинах з центрами на спільній осі  $x$ , перпендикулярній до цих площин (рис. 64.2). Радіуси цих контурів  $R_1$  і  $R_2$ . Припустимо, що лінійні розміри поперечного перерізу контурів набагато менші, ніж радіуси самих контурів і відстань між ними. Магнітна проникність середовища, яке оточує контури  $\mu_0$ , феромагнітні тіла відсутні. Визначимо магнітний потік  $\Psi_{2M}$ , зчеплений з другим контуром при проходженні струму  $i_1$  у першому контурі.

Векторний потенціал магнітного поля, створеного струмом  $i_1$ , у певній точці на осі другого контуру визначається за формулою [1]:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\bar{l}_1}{r}, \quad (64.2)$$

де  $r$  – відстань від елемента  $d\bar{l}_1$  першого контуру до точки на осі другого контуру, в якій визначається  $\bar{A}_2$ . Інтегрування здійснюємо вздовж усього першого контуру, вважаючи положення елемента довжини  $d\bar{l}_2$  фіксованим.

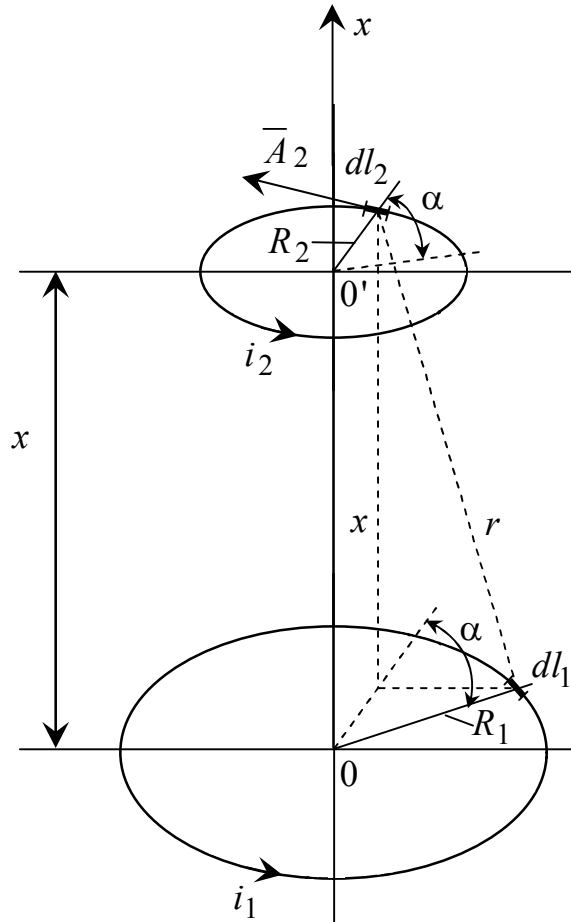


Рис. 64.2

Внаслідок симетрії відносно осі  $Ox$  лінії векторного потенціалу повинні бути колами, що лежать у площинах, паралельних площині контуру зі струмом  $i_1$ , і мають центри на осі  $Ox$ .

Векторний потенціал всюди спрямований по дотичній до цих кіл, тобто має єдину тангенціальну складову. Тоді вираз (64.1) запишеться так:

$$A_2 = A_{2\alpha} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\bar{l}_1 \cos \alpha}{r},$$

де  $\alpha$  – кут між  $d\bar{l}_1$  і  $d\bar{l}_2$  (рис. 64.2).

З цього ж рисунка маємо:

$$r = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \alpha + x^2} \quad \text{і} \quad dl_1 = R_1 d\alpha,$$

тоді:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1 R_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \alpha + x^2}}.$$

Цей інтеграл зводиться до табличних еліптичних інтегралів.

Дійсно, зробимо підстановку:

$$\alpha = \pi - 2\beta, \quad d\alpha = -2d\beta \quad \text{і} \quad \text{прийнемо, що:}$$

$$\frac{4R_1R_2}{x^2 + (R_1 + R_2)^2} = k^2.$$

Тоді

$$\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2\sin^2 \beta - 1,$$

$$r = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 4R_1R_2 \sin^2 \beta + 2R_1R_2 + x^2} = \frac{2\sqrt{R_1R_2}}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}.$$

Отже

$$A_2 = -\frac{\mu_0 i_1}{8\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} k \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{2(2\sin^2 \beta - 1) d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} k \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta.$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right),$$

можна написати

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right],$$

де

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}};$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta.$$

Величини  $E$  і  $K$  є повними еліптичними інтегралами першого та другого роду. Вони є функціями тільки модуля  $k$ .

На рис. 64.3 зображені криві залежності  $E$  і  $K$  від квадрата модуля  $k^2$ .

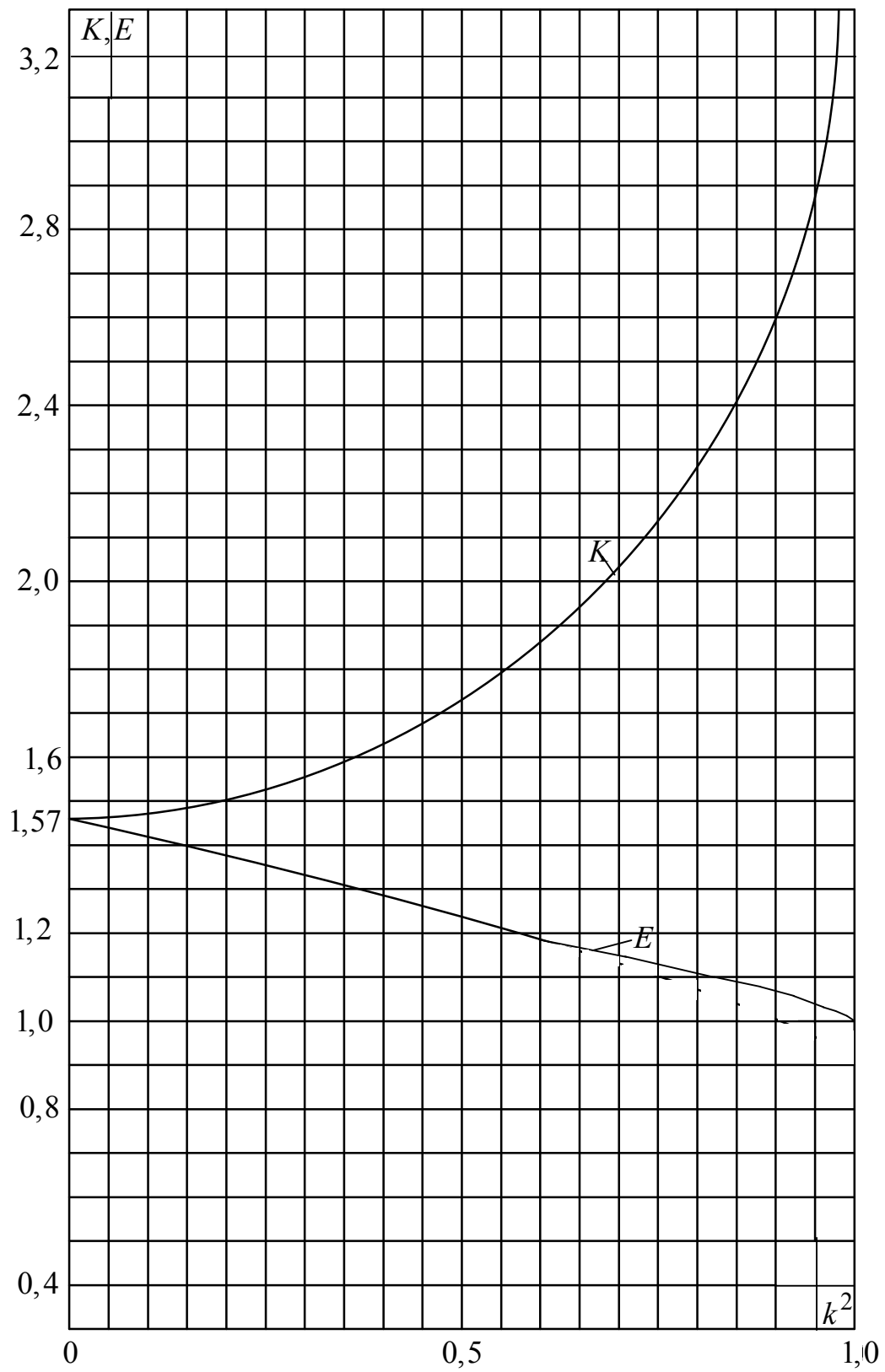


Рис. 64.3

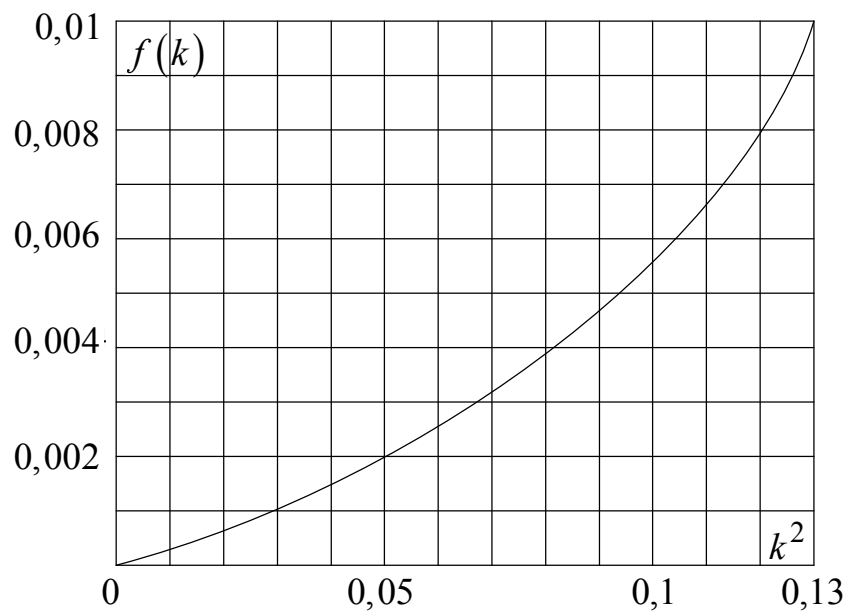


Рис. 64.4

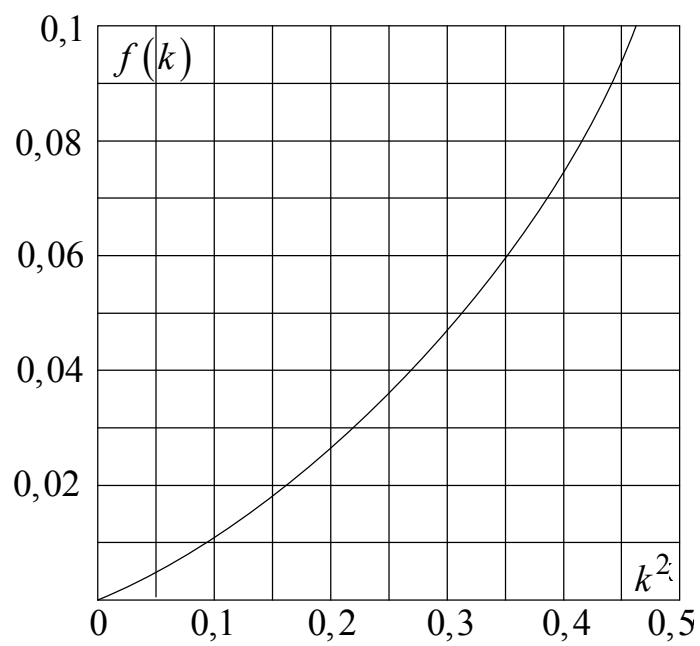


Рис. 64.5

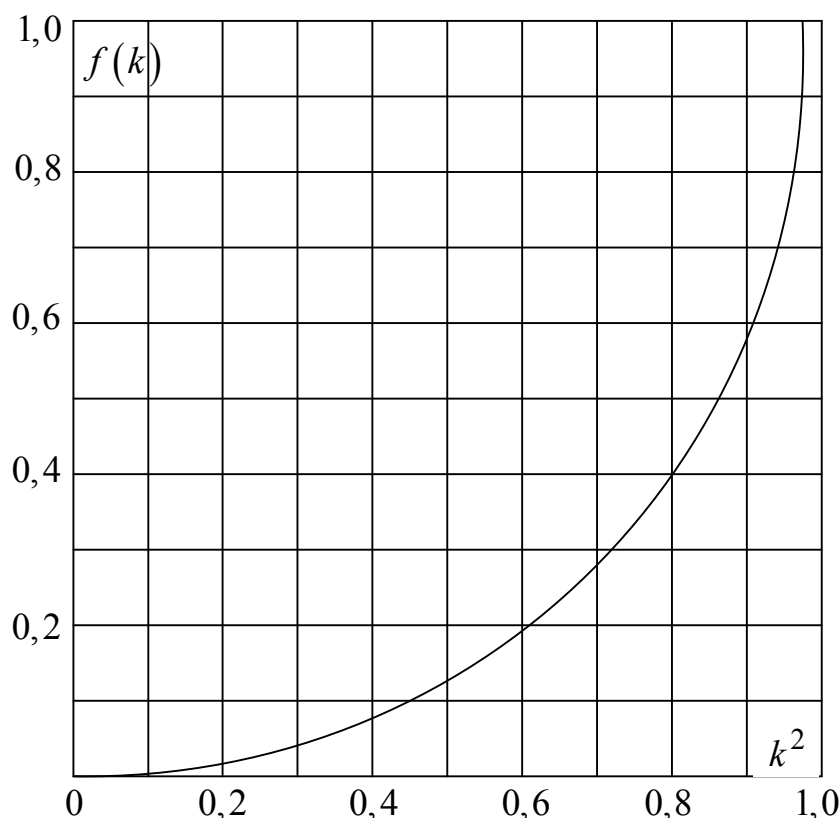


Рис. 64.6

Число  $k$  знаходиться в межах  $0 \leq k \leq 1$ . Воно набуває значення  $k=1$ , якщо  $x=0, R_1=R_2$ , тобто на осі нескінченно тонкого контуру зі струмом  $i_1$ . При цьому  $K = \infty$  і векторний потенціал також дорівнює нескінченності, що не відповідає фізичній суті цього поняття. Отже, спрощена формула (64.2), яка не враховує розподілу струму через поперечний переріз провідника, може застосовуватись лише на достатній відстані від провідника зі струмом.

Остаточний вираз для векторного потенціалу можна записати:

$$A_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} f(k),$$

де

$$f(k) = \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E.$$

На рис. 64.4, 64.5, 64.6 наведені криві залежності  $f(k)$  від  $k^2$ .

*Примітка.* Залежно від значення  $k^2$  слід користуватися тією чи іншою кривою для отримання більшої точності.

Магнітний потік взаємної індукції  $\Psi_{2M}$ , зчеплений з другим контуром і створений струмом першого контуру, знаходимо інтегруванням векторного потенціалу вздовж осі цього контуру:



$$\Phi_{2M} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2.$$

Оскільки вектор  $A$  скрізь дотичний до другого контуру і має постійне значення вздовж цього контуру, то

$$\Phi_{2M} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2 = \oint_{l_2} A_2 dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = A_2 2\pi R_2.$$

Використовуючи вираз для  $A_2$ , отримуємо

$$\Phi_{2M} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} f(k) 2\pi R_2 = \mu_0 i_1 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

Насправді ми маємо не одновиткові контури, а котушки з кількістю витків відповідно  $w_1$  і  $w_2$ . Отже струм  $i_1$  проходить по  $w_1$  витках, і поле посилюється в  $w_1$  разів у порівнянні з полем одного витка. Отже, потік взаємної індукції, який зчеплюється з одним витком другої котушки:

$$\Phi_{2M} = \mu_0 i_1 w_1 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

Повна кількість потікозчеплень з усіма  $w_2$  витками другої котушки:

$$\Psi_{2M} = w_2 \Phi_{2M} = \mu_0 i_1 w_1 w_2 \sqrt{R_1 R_2} f(k)$$

Таким чином, взаємна індуктивність двох круглих котушок виражається формулою

$$M = \frac{\Psi_{2M}}{i_1} = \mu_0 w_1 w_2 \sqrt{R_1 R_2} f(k).$$

Як було сказано вище, котушки з'єднані послідовно і так, що струми в них мають різні напрями  $i_1 = -i_2 = i$ , значить вимірюється сила відштовхування котушок

$$F = -i^2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (64.3)$$

Теоретичний розрахунок цієї сили здійснюють у такій послідовності.

Для досліджуваних у лабораторній роботі котушок  $R_1 = R_2 = R$  і  $w_1 = w_2 = w$ . Отже

$$M = \mu_0 w^2 R f(k), \text{ де } k = \frac{4R^2}{x^2 + 4R^2}$$

Спочатку будують криву  $M = \Psi(x)$ , розраховуючи для кожного  $x$  значення  $k$  і знаходячи  $f(k)$  з графіків на рис. 64.4 – 64.6.

Далі для кожного  $x$  знаходять похідну  $\frac{\partial M}{\partial x}$  за допомогою чисельного або графічного диференціювання кривої  $M = \Psi(x)$  і за формулою (64.3) розраховують електромагнітну силу  $F$ .

На основі розрахункових даних будують криві  $F = f(x)$  для різних значень струму і порівнюють їх з дослідними даними.

### **Питання для самостійної роботи**

1. Чому в лабораторній роботі вимірюється сила відштовхування, а не притягування котушок?
2. Які обмеження має використаний в лабораторній роботі спосіб розрахунку взаємної індуктивності між двома котушками?
3. Як зміниться методика розрахунку сили взаємодії між плоскими коаксіальними котушками у разі, коли ці котушки не круглі, а квадратні?

### **Література**

1. Бойко В. С., Бойко В. В., Видолоб Ю. Ф. та ін. Теоретичні основи електротехніки. У 3 т. Т. 3: підручник /– К. : НТУУ "КПІ", 2013. – с. 169–184.
2. Нейман Л.Р., Демірчян К.С., Юрінов В.М. Керівництво до лабораторії електромагнітного поля. -Вища шк., 1966. – с. 157 – 161.
3. Нейман Л.Р., Демірчян К.С. Теоретичні основи електротехніки. – Л. Енерговидав., 1981. Т.1. – с. 90 – 95.