

Лабораторна робота № 65

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМНОЇ ІНДУКТИВНОСТІ КРУГЛИХ ТА ПРЯМОКУТНИХ ПЛОСКИХ КОТУШОК

Мета роботи

Ознайомлення з методом експериментального визначення взаємної індуктивності та загальними принципами розрахунку взаємної індуктивності котушок.

Дослідження залежності взаємної індуктивності круглих і прямокутних котушок від відстані між ними методом вимірювання індукованої напруги.

Підготовка до роботи

Готуючись до роботи, необхідно:

1. Ознайомитися з робочим завданням і методичними вказівками.
2. Скласти протокол звіту з лабораторної роботи.
3. Відповісти на наступні питання:
 - а) чим визначається потік взаємоіндукції плоских котушок?
 - б) як виразити потік взаємоіндукції через векторний магнітний потенціал?
 - в) чому запропонований метод досліджень застосовується тільки для плоских котушок?
 - г) яке співвідношення між потоком взаємоіндукції двох котушок і потокозчепленням взаємоіндукції цих же котушок?
 - д) які основні рівняння описують стаціонарне магнітне поле.

Опис лабораторної установки

Живлення первинних обмоток досліджуваних круглої та прямокутної котушок здійснюється від джерела синусоїдної напруги з кутовою частотою ω через потенціометр та міліамперметр електромагнітної системи. Напруга U_2 на вторинних обмотках вимірюється вольтметром, який за допомогою двополюсного перемикача вмикається до однієї з обмоток. Як круглі, так і прямокутні досліджувані котушки можна переміщувати одну відносно одної у паралельних площинах.

Порядок виконання роботи

1. Скласти коло за схемою на рис. 65.1.
2. Записати геометричні параметри досліджуваних котушок.
3. Виміряти напруги на вторинних обмотках прямокутної та круглої котушок, змінюючи відстань між ними l при заданих струмах I_1 у
4. Результати вимірів для круглих котушок занести в таблицю 1, для прямокутних у таблицю 2.

Таблиця 2. Прямокутні котушки

$l, \text{мм}$	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105
$I_1 = 0.1, A$										
U_2, B										
$\tilde{I}, \tilde{A}i$										
$I_1 = 0.15(A)$										
U_2, B										
$\tilde{I}, \tilde{A}i$										
$I_1 = 0.25(A)$										
U_2, B										
$\tilde{I}, \tilde{A}i$										
Дослід	Усереднене M, Γ_H									
Розрахунок	M, Γ_H									

Методичні вказівки

Отримаємо вирази для обчислення взаємної індуктивності круглих котушок.

Оскільки лінійні розміри перерізів котушок малі у порівнянні з радіусами котушок, ми не зробимо великої похибки, якщо замінимо котушки тонкими коловими контурами, що проходять через центри перерізів. У кінцевій формулі доведеться врахувати, що котушки мають різні кількості витків w_1 і w_2 . Спочатку припустимо, що кожен коловий контур є одним витком. Нехай R_1 і R_2 радіуси цих колових контурів (рис. 65.2.).

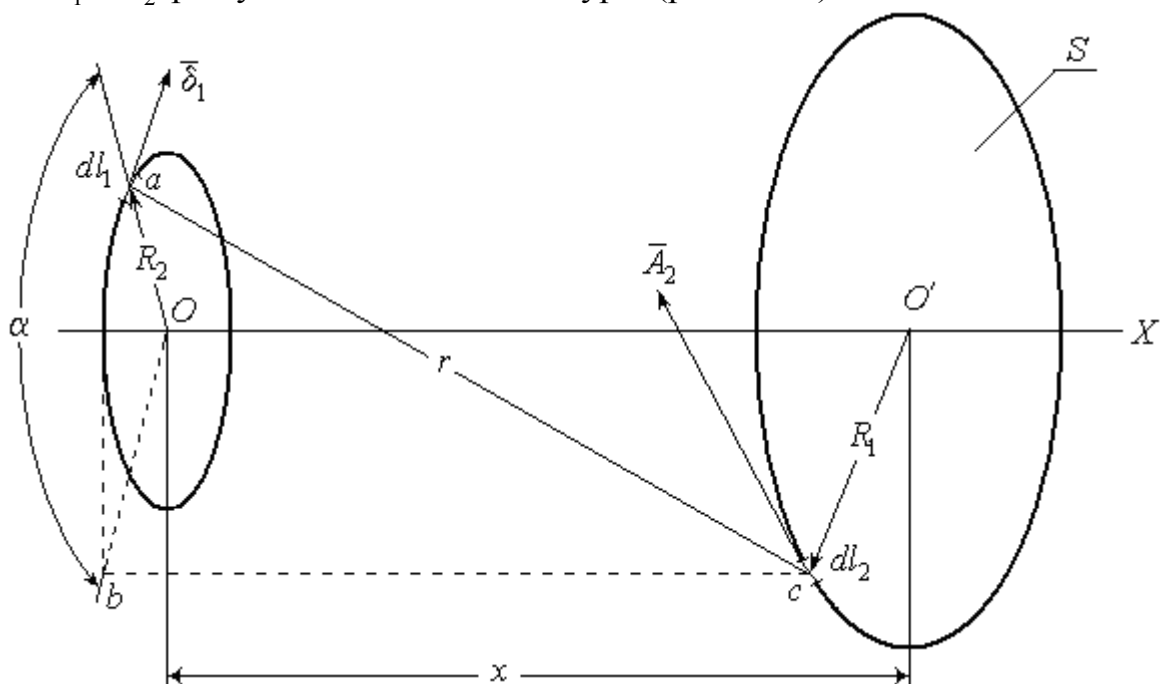


Рис. 65.2.

Потрібно розрахувати магнітний потік Ψ_{2i} , зчеплений з другим контуром, у разі проходження струму i_1 у першому контурі.

Зв'язок між магнітним потоком Φ , який проходить через деяку поверхню S , і векторним потенціалом \bar{A} на цьому контурі має вигляд:

$$\Phi = \oint_l \bar{A} \cdot d\bar{l}$$

де $d\bar{l}$ - елемент довжини контуру, що обмежує поверхню S .

Знайдемо векторний магнітний потенціал. Будь-який вектор може бути поданий як вихор іншого вектора. Тому вектор магнітної індукції \bar{H} може бути виражений через вектор \bar{A} , якщо останній вибрано таким чином, що задовольняються рівняння магнітного поля:

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta}; \quad (65.1)$$

$$\mu_0 \bar{H} = \bar{B}; \quad (65.2)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0. \quad (65.3)$$

Якщо припустити, що $\bar{B} = \text{rot } \bar{A}$, то підставляючи його значення у рівняння поля (65.1), (65.2) і (65.3), можна знайти значення вектора \bar{A} .

Рівняння (65.3) задовольняється за будь-якого значення \bar{A} , оскільки розходження (дивергенція) ротора будь-якого вектора завжди дорівнює нулю. Отже, вектор \bar{A} потрібно шукати з рівнянь (65.1) і (65.2).

Помноживши рівняння (65.1) на μ_0 і використовуючи вираз (65.2), одержимо:

$$\text{rot } \bar{B} = \mu_0 \bar{\delta}; \quad \text{rot rot } \bar{A} = \text{grad div } \bar{A} - \nabla^2 \bar{A} = \mu_0 \bar{\delta}.$$

Прийнявши, що $\text{div } \bar{A} = 0$, отримуємо:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{\delta}.$$

Для проекції вектора \bar{A} на координатну вісь X :

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 \delta_x.$$

Розв'язком цього рівняння є:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x dV}{r},$$

де V – об'єм, в якому розподілений струм.

Аналогічно для A_y і A_z :

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y dV}{r}; \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z dV}{r};$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V (\bar{i}\delta_x + \bar{j}\delta_y + \bar{k}\delta_z) \frac{dV}{r}.$$

Або

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta} dV}{r}.$$

Векторний потенціал A_2 у деякій точці на осі другого контуру у разі проходження струму I_1 у першому контурі визначається з виразу:

$$A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\delta}_1 dV_1}{r},$$

де μ_0 - магнітна проникність середовища, що оточує контури; $\bar{\delta}_1$ - вектор густини струму у центрі елемента об'єму dV_1 першого контуру, V_1 - об'єм першого контуру, r - відстань від V_1 до точки, в якій визначається A_2 . Припускаємо, що у цьому середовищі відсутні феромагнітні тіла.

Оскільки лінійні розміри поперечного перерізу S_1 першого контуру дуже малі у порівнянні з радіусом R_1 самого контуру, можна обмежитись розділенням об'єму цього контуру тільки по довжині на нескінченно малі відрізки dl_1 і подати dV_1 у вигляді:

$$dV_1 = S_1 dl_1.$$

Тепер маємо:

$$\bar{\delta}_1 dV_1 = \bar{\delta}_1 S_1 d\bar{l}_1 = I_1 d\bar{l}_1,$$

і

$$A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{d\bar{l}_1}{r}.$$

де інтегрування виконується вздовж всього першого контуру.

Внаслідок симетрії відносно осі OX лінії векторного потенціалу повинні бути колами, які лежать у площинах паралельних площині контура струму, і мають центри на осі OX . Векторний потенціал скрізь спрямований по дотичній до цих кіл, тобто має єдину складову

$$A_2 = A_{2\alpha} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{\cos \alpha \cdot dl_1}{r}.$$

Оскільки

$$r = \sqrt{x^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \alpha} \quad dl_1 = R_1 d\alpha$$

То

$$A_2 = \frac{\mu_0 I_1 R_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{x^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \alpha}}.$$

Цей інтеграл приводиться до табличних еліптичних інтегралів.
Прийmemo:

$$\alpha = \pi - 2\beta; \quad d\alpha = -2d\beta; \quad \frac{4R_1R_2}{x^2 + (R_1 + R_2)^2} = k^2.$$

Число k лежить у границях $0 \leq k \leq 1$. Значення $k=1$ буде при $x=0$ і $R_1 = R_2$, тобто коли контури зливаються один з одним. При цьому A_2 дорівнює нескінченності. Однак у дійсності повне суміщення контурів неможливе, оскільки переріз дійсних котушок скінченний.

Маємо $\cos \alpha = -\cos 2\beta = 2\sin^2 \beta - 1$,

$$r = \sqrt{x^2 + R_1^2 + R_2^2 - 4R_1R_2 \sin^2 \beta + 2R_1R_2} = \frac{2R_1R_2}{k} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}.$$

Отже

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I_1}{8\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2(2\sin^2 \beta - 1)d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} k \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} d\beta.$$

Користуючись тотожністю

$$\frac{2\sin^2 \beta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{2 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} - 2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \right)$$

можна записати

$$A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right],$$

де позначено

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}; \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta.$$

Величини K і E – це повні еліптичні інтеграли першого і другого роду. Вони є функціями модуля k . Таблицю цих інтегралів наведено в додатку.

Кінцевий вираз для векторного потенціалу можна подати у вигляді:

$$A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot f(k),$$

Де $f(k)$ - функція модуля k ,

$$f(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E$$

Потік взаємної індукції Φ_{2M} , зчеплений з другим контуром, отримаємо інтегруванням векторного потенціалу вздовж осі цього контуру:

$$\Phi_{2M} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2.$$

Оскільки вектор \bar{A}_2 скрізь дотичний до другого контуру і має постійне значення вздовж цього контуру, то

$$\Phi_{2M} = \oint_{l_2} \bar{A}_2 d\bar{l}_2 = \oint_{l_2} A_2 dl_2 = A_2 \oint_{l_2} dl_2 = A_2 \cdot 2\pi R_2.$$

Використовуючи вираз для A_2 , одержуємо

$$\Phi_{2M} = \mu_0 I_1 \sqrt{R_1 R_2} \cdot f(k).$$

У дійсності ми маємо не одновиткові контури, а котушки з кількостями витків w_1 і w_2 . Через те, що перша котушка складається із w_1 витків, у кожному з яких проходить струм I_1 , це приводить до підсилення поля у w_1 раз у порівнянні з полем одного витка. Отже, потік взаємної індукції окремого витка другої котушки:

$$\Phi_{2M} = \mu_0 I_1 w_1 \sqrt{R_1 R_2} \cdot f(k).$$

Повне число потокозчеплень з усіма w_2 витками другої котушки:

$$\Psi_{2M} = \Phi_{2M} w_2 = \mu_0 I_1 w_1 w_2 \sqrt{R_1 R_2} \cdot f(k).$$

Таким чином, шукана взаємна індуктивність визначається формулою:

$$M = \frac{\Psi_{2M}}{I_1} = \mu_0 w_1 w_2 \sqrt{R_1 R_2} \cdot f(k).$$

Для розрахунку взаємної індуктивності прямокутних котушок замінюємо ці котушки тонкими прямокутними контурами, сторони яких проходять через центри перерізів обмоток дійсних котушок. Позначимо довжини сторін прямокутників a і b . Обидва прямокутники однакові і розміщені один відносно другого так, що всі їх сторони або взаємно паралельні, або взаємно перпендикулярні. Припустимо спочатку, що кожен контур складається із одного витка. Для розрахунку взаємної індуктивності M' таких контурів природно скористатися методом ділянок. Розбиваємо кожний контур на чотири прямолінійних відрізки відповідно числу сторін. Нехай k – порядковий номер відрізків першого контуру і p – порядковий номер відрізків другого контуру, тоді маємо:

$$M' = \sum_{k=1}^{k=4} \sum_{p=1}^{p=4} M_{kp}$$

$$M_{kp} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_k} \int_{l_p} \frac{d\bar{l}_k d\bar{l}_p}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{l_k} \int_{l_p} \frac{\cos \vartheta dl_k dl_p}{r},$$

де M_{kp} - взаємна індуктивність між k -м відрізком першого контуру і p -м відрізком другого контуру; l_k і l_p - довжини цих відрізків, dl_k і dl_p - елементи довжин; ϑ - кут між дотичними до контурів у точках, в яких беруть елементи довжини dl_k і dl_p ;

r - відстань між цими точками.

Якщо відрізки прямолінійні, $\cos \vartheta$ залишається постійним вздовж відрізків і може бути винесеним за знак інтеграла. Одержуємо:

$$M_{kp} = \frac{\mu_0 \cos \vartheta}{4\pi} \int_{l_k} \int_{l_p} \frac{dl_k dl_p}{r}.$$

Користуючись методом аналогії з електростатичним полем лінійних електричних зарядів, запишемо:

$$M_{kp} = \mu_0 \varepsilon_0 l_k l_p \cos \vartheta \cdot \alpha_{kp}$$

де α_{kp} - взаємний потенціальний коефіцієнт між такими ж відрізками, обчислений за наближеним методом, що базується на припущенні рівномірності розподілу заряду вздовж відрізків.

Для визначення $\cos \vartheta$ задамося позитивним напрямом обходу контурів. Виберемо для обох контурів позитивні напрями обходу однаковими. Тоді $M' > 0$, однак окремі складові M_{kp} будуть мати різні знаки.

Для паралельних відрізків маємо $\cos \vartheta = 1$, якщо напрями обходу в обох відрізках однакові, і $\cos \vartheta = -1$, якщо вони протилежні.

Для взаємно перпендикулярних відрізків $\cos \vartheta = 0$ і $M_{kp} = 0$.

При вказаному вище взаємному розміщенні двох однакових прямокутних контурів всі взаємно паралельні відрізки мають однакові довжини a або b . Всі ці відрізки взаємно розміщені так, що їх початки лежать на одному спільному до них перпендикулярі.

Користуючись аналогією між формулою для взаємної індуктивності прямокутних відрізків, записаною вище, і формулою для взаємного потенціального коефіцієнта таких двох відрізків:

$$\alpha_{kp} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 l_k l_p} \int_{l_k} \int_{l_p} \frac{dl_k dl_p}{r},$$

одержуємо для паралельних відрізків:

$$M_{kp} = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2} + 1} \right) - \sqrt{1 + \frac{l^2}{D^2}} + \frac{D}{l} \right]$$

або

$$M_{kp} = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{l + \sqrt{D^2 + l^2}}{D} \right) - \frac{\sqrt{D^2 + l^2} - D}{l} \right]$$

де l - довжина відрізків; D - відстань між ними і $\sqrt{D^2 + l^2}$ - довжина діагоналі між протилежними кінцями двох відрізків.

У досліджуваному випадку l дорівнює або a або b ; D дорівнює або x , або, $\sqrt{b^2 + x^2}$, або $\sqrt{a^2 + x^2}$.

Оскільки досліджувані котушки мають w_1 і w_2 витків, взаємна індуктивність між ними

$$M = w_1 w_2 M',$$

де M' - взаємна індуктивність між одновитковими прямокутними контурами.

Для проведення розрахунків потрібно зняти всі необхідні розміри котушок.

Користуючись наведеними формулами, обчислюємо взаємну індуктивність M для ряду значень x , які знаходяться в тому ж інтервалі, що і одержані дослідні дані. Будуємо осереднені (за трьома значеннями струму) криві $M = f(x)$ на основі результатів розрахунку. На ці діаграми наносимо точки, знайдені шляхом вимірів, і за цими точками будуємо дослідні криві.

Причиною деякої розбіжності дослідних і розрахункових кривих, крім неминучих похибок вимірів, може бути зроблена для спрощення розрахунку заміна котушок зі скінченним перерізом обмоток еквівалентними дуже тонкими контурами. Очевидно, похибки, що виникають у разі такого спрощення, будуть мати найбільші значення при малих відстанях x між котушками. Якщо виміри і розрахунок виконані з належною старанністю, то порівняння дослідних і розрахункових кривих дає критерій допустимості такого спрощення.

Питання для самостійної роботи

1. Як оцінити похибку, що виникає при заміні котушки скінченного перерізу контуром, радіус якого дорівнює середньому радіусу котушки? Для цього визначити взаємну індуктивність для двох крайніх витків круглої котушки – зовнішнього і внутрішнього і порівняти з одержаним розрахунковим результатом.
2. Як змінюється похибка розрахунку взаємної індуктивності при зміні відстані між котушками?

Повні еліптичні інтеграли
першого і другого роду K і E у залежності від квадрату модуля k^2

k^2	K	E	k^2	K	E
0,00	1,57080	1,57080	0,40	1,77752	1,39939
0,01	1,57475	1,56686	0,41	1,78452	1,39465
0,02	1,57874	1,56291	0,42	1,79165	1,38988
0,03	1,58278	1,55895	0,43	1,79892	1,38509
0,04	1,58687	1,55497	0,44	1,80633	1,38026
0,05	1,59100	1,55097	0,45	1,81388	1,37540
0,06	1,59519	1,54696	0,46	1,82159	1,37051
0,07	1,59942	1,54294	0,47	1,82946	1,36560
0,08	1,60371	1,53889	0,48	1,83749	1,36064
0,09	1,60805	1,53483	0,49	1,84569	1,35566
0,10	1,61244	1,53076	0,50	1,85407	1,35064
0,11	1,61689	1,52666	0,51	1,86264	1,34559
0,12	1,62139	1,52256	0,52	1,87140	1,34051
0,13	1,62595	1,51843	0,53	1,88036	1,33538
0,14	1,63058	1,51428	0,54	1,88953	1,33022
0,15	1,63526	1,51012	0,55	1,89892	1,32502
0,16	1,64000	1,50594	0,56	1,90855	1,31979
0,17	1,64481	1,50174	0,57	1,91841	1,31451
0,18	1,64968	1,49753	0,58	1,92853	1,30919
0,19	1,65462	1,49329	0,59	1,93891	1,30383
0,20	1,65962	1,48903	0,60	1,94957	1,29843
0,21	1,66470	1,48476	0,61	1,96052	1,29298
0,22	1,66985	1,48047	0,62	1,97178	1,28748
0,23	1,67507	1,47615	0,63	1,98337	1,28194
0,24	1,68037	1,47182	0,64	1,99530	1,27635
0,25	1,68575	1,46746	0,65	2,00760	1,27071
0,26	1,69121	1,46309	0,66	2,02028	1,26501
0,27	1,69675	1,45869	0,67	2,03337	1,25926
0,28	1,70237	1,45427	0,68	2,04689	1,25346
0,29	1,70809	1,44983	0,69	2,06088	1,24759
0,30	1,71389	1,44536	0,70	2,07536	1,24167
0,31	1,71978	1,44088	0,71	2,09037	1,23568
0,32	1,72578	1,43637	0,72	2,10595	1,22963
0,33	1,73186	1,43183	0,73	2,12213	1,22351
0,34	1,73806	1,42727	0,74	2,13897	1,21732
0,35	1,74435	1,42269	0,75	2,15652	1,21106
0,36	1,75075	1,41808	0,76	2,17483	1,20471
0,37	1,75727	1,41345	0,77	2,19397	1,19829
0,38	1,76390	1,40879	0,78	2,21402	1,19178
0,39	1,77065	1,40410	0,79	2,23507	1,18518

k^2	K	E	k^2	K	E
0,80	2,25721	1,17849	0,90	2,57809	1,10477
0,81	2,28055	1,17170	0,91	2,62777	1,09648
0,82	2,30523	1,16480	0,92	2,68355	1,08794
0,83	2,33141	1,15779	0,93	2,74707	1,07912
0,84	2,35926	1,15066	0,94	2,82075	1,06999
0,85	2,38902	1,14340	0,95	2,90834	1,06047
0,86	2,42093	1,13600	0,96	3,01611	1,05050
0,87	2,45534	1,12845	0,97	3,15587	1,03995
0,88	2,49264	1,12074	0,98	3,35414	1,02859
0,89	2,53333	1,11286	0,99	3,69564	1,01599
			1,00	∞	1,00000

Література

1. Бойко В. С., Бойко В. В., Видолоб Ю. Ф. та ін. Теоретичні основи електротехніки. У 3 т. Т. 3: підручник /– К. : НТУУ "КПІ", 2013. – с. 181–183.
2. Нейман Л.Р., Демірчян К.С., Юрінов В.М. Керівництво до лабораторії електромагнітного поля. -Вища шк., 1966. – с. 121–130.