

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт
з дисципліни “*Теоретичні основи електротехніки*”
для галузі знань “*Електрична інженерія*”
спеціальності “*Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка*”

Київ 2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт
з дисципліни *“Теоретичні основи електротехніки”*
для галузі знань *“Електрична інженерія”*
спеціальності *“Електроенергетика, електротехніка та
електромеханіка”*

*Рекомендовано Вченою радою факультету
електроенерготехніки та автоматики
(протокол № 7 від 29 лютого 2016 р.)*

Київ 2016

“Електричні кола несинусоїдного струму”: Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з дисципліни “Теоретичні основи електротехніки” для підготовки студентів спеціальності “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” всіх форм навчання / Уклад.: Є. А Кудря, І. Н. Намацалюк, Ю.В. Перетятко. – К.: НТУУ “КПІ” 2016.– 58с.

Укладачі: *Кудря Євген Антонович, канд. тех. наук, доц.*
Намацалюк Ігор Несторович, канд. тех. наук, доц.
Перетятко Юлія Вікторівна, канд. тех. наук, доц.

Відповідальний
редактор: *Бойко Валерій Степанович, док. тех. наук, професор.*

Рецензент: *Анпілогов Микола Георгієвич, канд. тех. наук, доц.*

*Затверджено рішенням засідання
кафедри “Теоретичної електротехніки”
(протокол №7 від 24 лютого 2016 р.)*

ЗМІСТ

Вступ	5
1. Причини виникнення несинусоїдних ерс, струмів, напруг	6
2. Подання періодичних несинусоїдних функцій рядом Фур'є	8
3. Комплексна форма ряду Фур'є	16
4. Графоаналітичний метод подання	19
5. Розрахунок лінійного електричного кола з періодичними несинусоїдними джерелами енергії	22
6. Діючі і середні значення періодичних несинусоїдних струмів і напруг	28
7. Потужність у колах несинусоїдного струму	30
8. Коефіцієнти, що характеризують періодичні несинусоїдні струми та напруги	33
9. Вплив індуктивних і ємнісних елементів на форму кривої струму у разі несинусоїдної напруги	35
10. Резонанс в електричному колі з несинусоїдною ерс	37
11. Вищі гармоніки в трифазних електричних колах	42
11.1. З'єднання трифазного генератора трикутником	43
11.2. З'єднання трифазного генератора зіркою	44
Контрольні запитання	52
Завдання для самостійної роботи	54
Список використаної літератури	58

ВСТУП

Мета даних методичних вказівок допомогти студентам в їх самостійній роботі по вивченню важливого розділу “Електричні кола з несинусоїдними періодичними ЕРС, напругами і струмами” дисципліни *“Теоретичні основи електротехніки”*.

В теоретичній частині вказівок приведено поглиблений математичний аналіз деяких питань розділу, вивчення яких викликає у студентів певні труднощі. Це перш за все питання подання періодичних несинусоїдних функцій струмів та напруг рядами Фур’є, де поряд з тригонометричною формою рекомендовано також використання комплексної форми ряду. На основі виконаного аналізу отримані узагальнені формули коефіцієнтів ряду Фур’є для несинусоїдних функцій струмів і напруг, які часто зустрічаються в електричних пристроях.

Значна увага приділена аналізу досить складних для студентів питань, що стосуються дослідження явища резонансу в електричному колі з несинусоїдною ЕРС та вищих гармонік в трифазному колі.

До кожного з досліджуваних питань приведені приклади розрахунків, які доповнюють аналіз положення розділу і допоможуть студентам в опануванні цих положень.

Завершальним етапом самостійної роботи студента по вивченню розділу повинно бути виконання індивідуальної розрахункової роботи, завдання на яку розроблено і приведено в методичних вказівках.

Методичні вказівки призначені для студентів денної та заочної форм навчання напрямів підготовки, в яких передбачено вивчення дисципліни *“Теоретичні основи електротехніки”*.

1. ПРИЧИНИ ВИНИКНЕННЯ НЕСИНУСОЇДНИХ ЕРС, СТРУМІВ, НАПРУГ

В реальних електротехнічних пристроях криві ЕРС і струмів джерел енергії, струми і напруги споживачів у тій чи іншій мірі відрізняються від синусоїдних. Зокрема, в потужних генераторах електростанцій форми кривих ЕРС, які індукуються в обмотках, не є ідеальними синусоїдами. Якщо ж серед споживачів електричної енергії є пристрої з нелінійними характеристиками (комп'ютерна, офісна та сучасна побутова техніка), то навіть у разі синусоїдних ЕРС виникають несинусоїдні струми і напруги. В якості прикладу на рис. 1, а зображено коло з нелінійним резистором, нелінійна вольт-амперна характеристика якого призводить до появи струму несинусоїдної форми при дії на вході кола синусоїдної напруги.

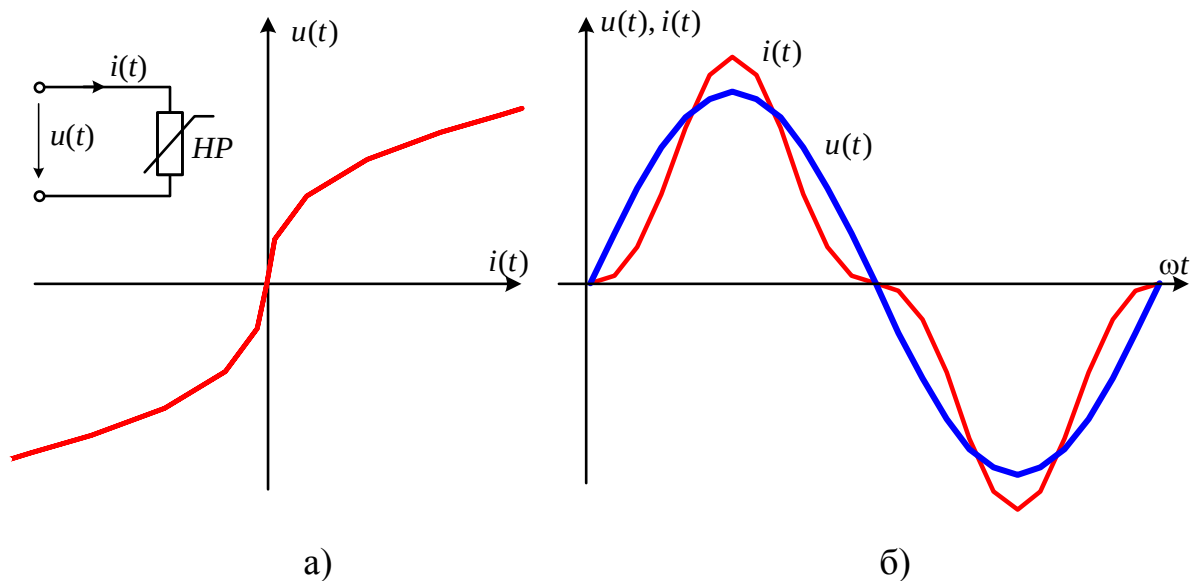


Рис. 1

Для системи електропостачання спотворення синусоїдних струмів і напруг небажане. Поява вищих гармонічних складових у кривій напруги сприяє появі додаткових втрат енергії в електричних двигунах і трансформаторах, помітно позначається на появі та перебізі іонізаційних процесів в ізоляції електричних машин, трансформаторів та кабельних

ліній, що прискорює її старіння, утруднюється компенсація реактивної потужності за допомогою конденсаторних батарей, погіршуються умови роботи пристроїв автоматики, телемеханіки, зв'язку.

Поряд з генераторами синусоїдних (чи умовно-синусоїдних) ЕРС в пристроях радіотехніки, обчислювальної техніки, в автоматизованих системах керування і т.п. використовуються генератори періодичних сигналів, форма яких може значно відрізнятись від синусоїди, наприклад, прямокутна (рис. 2, а) чи “пилкоподібна” (рис. 2, б). Дія такого генератора приводить до появи в окремих елементах кола струмів та напруг, форми яких можуть суттєво відрізнятись від форми збуджуючого сигналу.

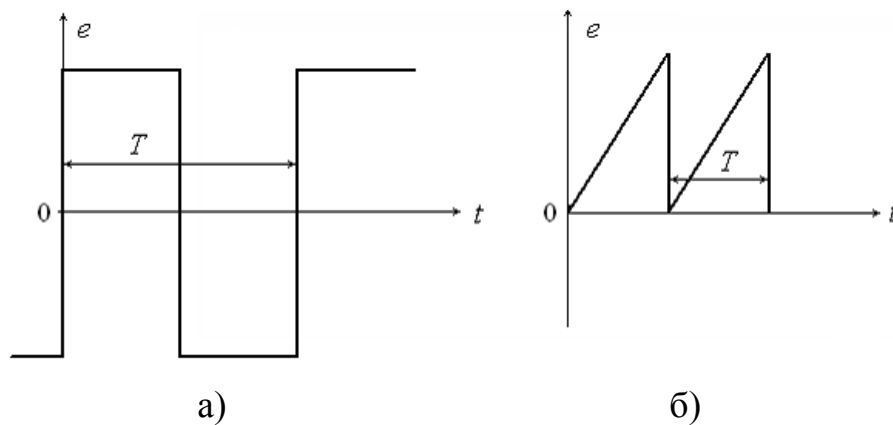


Рис. 2

Зображені на рис. 1, б) і 2 криві періодичні (період T) і є прикладами несинусоїдних періодичних струмів та ЕРС.

Таким чином, **причинами виникнення несинусоїдних періодичних ЕРС, струмів, напруг є:**

1. Джерело ЕРС (струму), що генерує несинусоїдну періодичну ЕРС (несинусоїдний періодичний струм);
2. Джерело ЕРС (струму) генерує синусоїдну періодичну ЕРС (синусоїдний періодичний струм), але один з елементів кола є нелінійним;
3. Джерело ЕРС (струмів) дає постійну чи синусоїдну ЕРС (струм), а один чи кілька елементів кола періодично змінюють свої параметри у часі.

Способи подання несинусоїдних періодичних величин:

- часовими діаграмами;
- тригонометричним рядом Фур'є;
- еквівалентними синусоїдами.

Явища, які відбуваються у лінійних колах при періодичних несинусоїдних ЕРС, струмах та напругах простіше досліджувати, якщо криву ЕРС (струму та напруги) розкласти у ряд Фур'є.

2. ПОДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ НЕСИНУСОЇДНИХ ФУНКЦІЙ РЯДОМ ФУР'Є

Для дослідження лінійних електричних кіл з періодичними несинусоїдними струмами доцільно ЕРС, напруги і струми подавати рядом Фур'є.

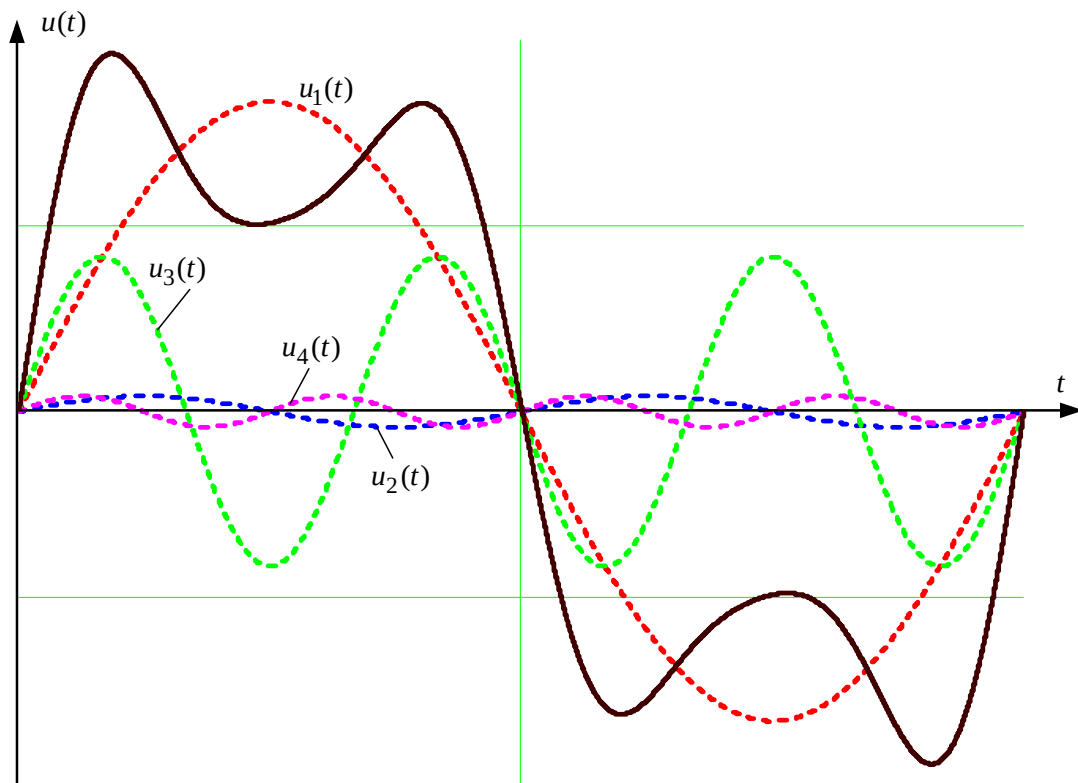


Рис. 3

Будь-яка періодична функція $f(\omega t)$, яка відповідає умовам Діріхле (має протягом періоду скінченну кількість розривів 1-го роду і скінченну

кількість екстремумів), може бути записана тригонометричним рядом Фур'є:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут: A_0 – стала складова (нульова гармоніка);

$A_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$ – основна чи перша гармоніка;

$A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – вища гармоніка k -го порядку;

$\omega = 2\pi/T$ – основна частота (кутова);

T – період несинусоїдної функції.

Від форми ряду (1) легко перейти до іншої форми (2), врахувавши значення синуса суми ($k\omega t + \psi_k$):

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos \psi_k \sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin \psi_k \cos(k\omega t) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

де $A_{mk} \cos \psi_k = B_k$, $A_{mk} \sin \psi_k = C_k$.

Коефіцієнти A_0, B_k, C_k , якщо функція $f(\omega t)$ задана аналітично на періоді $(0, 2\pi)$, можуть бути визначені із співвідношень:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t), \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \\ C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо ж функція $f(\omega t)$ задана графічно і аналітичне рівняння функції невідоме, тоді замість обчислень за формулами (3) користуються чисельними розрахунками визначених інтегралів. Для цього період функції

розбивають на p однакових інтервалів ($p=12, 24, 36$ у залежності від бажаної точності розрахунків) та визначають ординати функції в кінці кожного інтервалу $f(s \cdot 2\pi / p)$ (s набуває значень від 1 до p).

Виконавши відповідні зміни в формулах (3)

$$(\omega t \cong s \cdot 2\pi / p, d(\omega t) \cong 2\pi / p, k\omega t \cong k \cdot s \cdot 2\pi / p),$$

замість формул (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} A_0 &\cong \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p f(s \cdot 2\pi / p), \\ B_k &\cong \frac{2}{p} \sum_{s=1}^p f(s \cdot 2\pi / p) \sin(2\pi \cdot k \cdot s / p), \\ C_k &\cong \frac{2}{p} \sum_{s=1}^p f(s \cdot 2\pi / p) \cos(2\pi \cdot k \cdot s / p). \end{aligned} \quad (4)$$

Визначивши коефіцієнти A_0, B_k, C_k за формулами (3) чи (4), можемо записати функцію у вигляді ряду (2). Якщо ж є необхідність подати функцію у вигляді ряду (1), то попередньо визначають амплітуди A_{mk} і початкові фази ψ_k всіх гармонік:

$$\begin{aligned} A_{mk} &= \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \\ \psi_k &= \begin{cases} \arctg C_k / B_k, & \text{якщо } B_k > 0, \\ \pm\pi + \arctg C_k / B_k, & \text{якщо } B_k < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для розрахунку електричного кола несинусоїдного струму зручніше користуватись формулою ряду (1).

В електротехнічних пристроях дуже часто зустрічаємо несинусоїдні періодичні струми і напруги, які відносять до категорії функцій симетричних відносно осі абсцис (рис. 2, а). Такі функції мають задовольняти умову:

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi).$$

У ряді Фур'є такої функції не буде сталої складової і парних гармонік:

$$f(\omega t) = \sum_{k=1,3,5...}^{\infty} (B_k \sin(k\omega t) + C_k \cos(k\omega t)).$$

Важливою властивістю вказаних функцій є те, що для визначення коефіцієнтів B_k і C_k достатньо виконати інтегрування за півперіоду:

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \sin(k\omega t) d(\omega t), \quad (5)$$

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (6)$$

Якщо функція симетрична відносно початку координат, тобто задовольняє умові $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ (наприклад рис. 2, а), то ряд Фур'є такої функції містить тільки синусні складові:

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t).$$

Коефіцієнт A_{mk} ряду цієї функції може бути визначений інтегруванням за півперіоду за формулою (5) ($A_{mk} = B_k$).

Симетрична відносно осі ординат функція ($f(\omega t) = f(-\omega t)$) не містить синусних складових і її ряд матиме вигляд:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \cos(k\omega t).$$

Коефіцієнт A_{mk} цього ряду також може бути визначений інтегруванням за половину періоду ($A_{mk} = C_k$, (6)).

ПРИКЛАД 1.

Подати рядом Фур'є функцію $e(\omega t)$, зображену на рис.4.

Функція має 2 види симетрії: відносно початку координат і відносно осі абсцис. Тому ряд Фур'є такої функції буде мати тільки непарні синусні складові:

$$e(\omega t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} E_{mk} \sin k\omega t.$$

Зважаючи на те, що функція має 2 види симетрії, коефіцієнти E_{mk} ряду можна отримати, обмежившись інтегруванням за чверть періоду:

$$E_{mk} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} e \sin(k\omega t) d(\omega t). \quad (7)$$

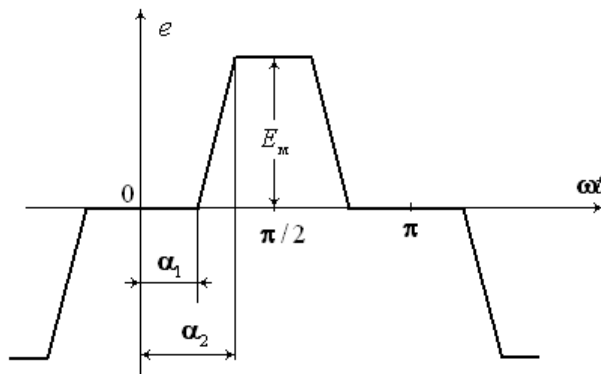


Рис. 4

На інтервалі $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ функцію можна записати рівняннями:

$$e=0, \quad 0 \leq \omega t \leq \alpha_1;$$

$$e = \frac{E_M}{\alpha_2 - \alpha_1} (\omega t - \alpha_1), \quad \alpha_1 \leq \omega t \leq \alpha_2;$$

$$e = E_M, \quad \alpha_2 \leq \omega t \leq \pi/2.$$

Тоді для амплітуд E_{mk} ряду матимемо:

$$E_{mk} = \frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_M}{\alpha_2 - \alpha_1} (\omega t - \alpha_1) \sin(k\omega t) d(\omega t) + \int_{\alpha_2}^{\pi/2} E_M \sin(k\omega t) d(\omega t) \right]. \quad (8)$$

Вкажемо на інший більш зручний варіант знаходження коефіцієнтів B_k , C_k у формулах (3), (5), (6) для частинно-лінійних функцій. Якщо, наприклад, для визначення коефіцієнту B_k за формулою (3) скористатись правилом інтегрування по частинах, то отримаємо:

$$B_k = -\frac{1}{\pi k} \left[f(\omega t) \cos(k\omega t) \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (9)$$

Якщо періодична функція не має розривів неперервності всередині періоду і на його межах, то перша складова виразу (9) після підстановки меж інтегрування дає 0. Тоді для B_k отримаємо:

$$B_k = \frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (10)$$

Аналогічний розв'язок матимемо для C_k :

$$C_k = -\frac{1}{\pi k} \int_0^{2\pi} \frac{df(\omega t)}{d(\omega t)} \sin(k\omega t) d(\omega t). \quad (11)$$

Вирази (10) і (11) дають можливість спростити розрахунки коефіцієнтів B_k і C_k для багатьох електротехнічних задач. Перш за все це стосується випадків, коли напруга чи струм є частинно-лінійними неперервними функціями (наприклад, рис. 4). Для визначення коефіцієнту E_{mk} цієї функції замість (7) можна запропонувати:

$$E_{mk} = -\frac{4}{\pi k} [e \cos(k\omega t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{\pi k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{de}{d(\omega t)} \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (12)$$

Перша складова виразу (12) після підстановки меж дає нуль ($e(0)=0$, k —*тільки непарні*). Вираз під інтегралом другої складової відмінний від 0 тільки на інтервалі від α_1 до α_2 . Таким чином:

$$E_{mk} = \frac{4}{\pi k} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{de}{d(\omega t)} \cos(k\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi k} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{E_M}{\alpha_2 - \alpha_1} \cos(k\omega t) d(\omega t). \quad (13)$$

Визначення коефіцієнтів E_{mk} за (13) буде більш простою операцією, ніж за (8). Після інтегрування і підстановки меж отримаємо:

$$E_{mk} = \frac{4E_M}{\pi k^2 (\alpha_2 - \alpha_1)} (\sin k\alpha_2 - \sin k\alpha_1), \quad k=1, 3, 5, \dots \quad (14)$$

Із формули (14) можна отримати вирази амплітуд E_{mk} для функцій, зображених на рис. 5 і 6 з урахуванням конкретних значень α_1 і α_2 .

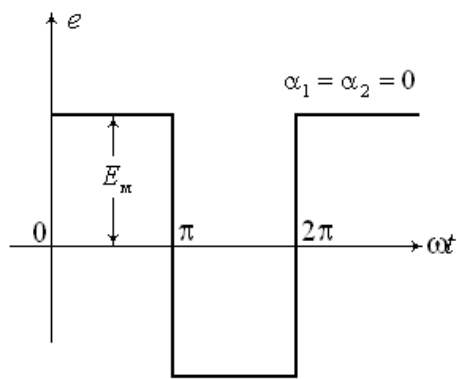


Рис. 5

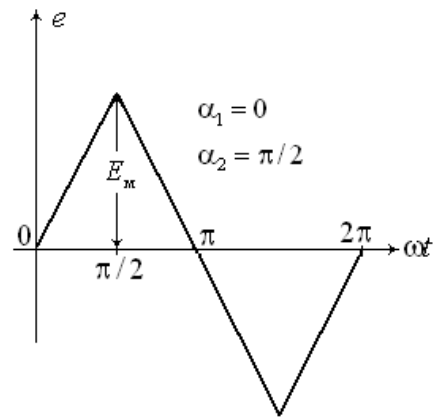


Рис. 6

$$E_{mk} = \frac{4E_m}{\pi k}$$

(для рис. 5)

$$E_{mk} = \frac{8E_m}{\pi^2 k^2} \sin k \frac{\pi}{2}, \quad k=1, 3, 5, \dots \quad (3.14^*)$$

(для рис. 6)

ПРИКЛАД 2.

Подати рядом Фур'є функцію напруги $u(t)$, зображену на рис. 7.
Визначити постійну і три змінних складових ряду.

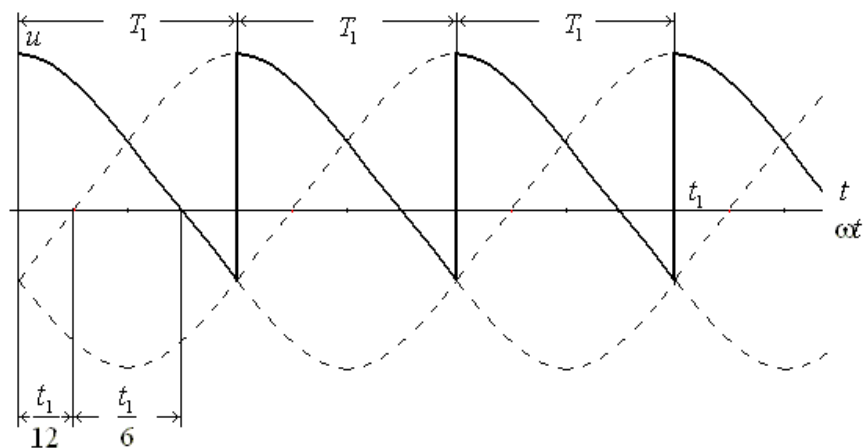


Рис. 7

Кутова частота основної гармоніки ряду Фур'є досліджуваної функції

$$\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 3 \left(\frac{2\pi}{t_1} \right) = 3\omega_1; \quad \omega_1 = \frac{\omega}{3}.$$

Введемо нову змінну $\vartheta = \omega t$. Тоді, враховуючи (3), для коефіцієнтів A_0, B_k, C_k матимемо:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_m \cos\left(\frac{1}{3}\vartheta\right) d\vartheta = 0.413U_m;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_m \cos\left(\frac{1}{3}\vartheta\right) \sin(k\vartheta) d\vartheta = \frac{U_m}{2\pi} \left[\frac{-\cos 2\pi\left(\frac{1}{3} + k\right) + 1}{\frac{1}{3} + k} + \frac{\cos 2\pi\left(\frac{1}{3} + k\right) - 1}{\frac{1}{3} - k} \right];$$

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_m \cos\left(\frac{1}{3}\vartheta\right) \cos(k\vartheta) d\vartheta = \frac{U_m}{2\pi} \left[\frac{\sin 2\pi\left(\frac{1}{3} - k\right)}{\frac{1}{3} - k} + \frac{\sin 2\pi\left(\frac{1}{3} + k\right)}{\frac{1}{3} + k} \right].$$

Надаючи k значення 1,2,3 отримаємо:

$$\begin{aligned} k=1, & \quad B_1 = 0.537 U_m, & C_1 = -0.103 U_m; \\ k=2, & \quad B_2 = 0.245 U_m, & C_2 = -0.0236 U_m; \\ k=3, & \quad B_3 = 0.161 U_m, & C_3 = -0.0103 U_m. \end{aligned}$$

Далі визначаємо амплітуди і початкові фази гармонічних складових:

$$A_{mk} = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{C_k}{B_k}.$$

$$A_{m1} = U_m \sqrt{(0.537)^2 + (-0.103)^2} \approx 0.547 U_m,$$

$$A_{m2} = U_m \sqrt{(0.245)^2 + (-0.0236)^2} \approx 0.245 U_m,$$

$$A_{m3} = U_m \sqrt{(0.161)^2 + (-0.0103)^2} \approx 0.161 U_m;$$

$$\psi_1 = \arctg \frac{-0.103 U_m}{0.537 U_m} = -10.86^\circ,$$

$$\psi_2 = \arctg \frac{-0.0236 U_m}{0.245 U_m} = -5.5^\circ,$$

$$\psi_3 = \arctg \frac{-0.0103 U_m}{0.161 U_m} = -3.67^\circ.$$

Таким чином, ряд Фур'є для перших чотирьох складових функції $u(t)$, рис. 7 має вигляд:

$$u(t) = U_m \left[0.413 + 0.547 \sin(\omega t - 10.86^\circ) + 0.245 \sin(2\omega t - 5.5^\circ) + 0.161 \sin(3\omega t - 3.67^\circ) + \dots \right]$$

3. КОМПЛЕКСНА ФОРМА РЯДУ ФУР'Є

Нехай функція $f(\omega t)$ подана тригонометричним рядом (2) у вигляді:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \sin(k\omega t) + C_k \cos(k\omega t)).$$

Перетворимо загальний член цього ряду з допомогою відомих формул Ейлера

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad \sin(k\omega t) = \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2}$$

які виражають синус і косинус через показникові функції. Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} B_k \sin(k\omega t) + C_k \cos(k\omega t) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[(C_k - jB_k) e^{jk\omega t} + (C_k + jB_k) e^{-jk\omega t} \right] = \underline{F}_{m(k)} e^{jk\omega t} + \underline{F}_{m(-k)} e^{-jk\omega t} \end{aligned} \quad (15)$$

Приймаючи до уваги значення коефіцієнтів B_k і C_k (формули (3)), для комплексного коефіцієнту $\underline{F}_{m(k)}$ отримаємо:

$$\underline{F}_{m(k)} = \frac{1}{2} (C_k - jB_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) e^{-jk\omega t} d(\omega t). \quad (16)$$

Сталу складову $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t)$ можна розглядати, як часткове значення $\underline{F}_{m(k)}$ для $k = 0$. Зважаючи на наявність у формулі (15) ще складової $\underline{F}_{m(-k)} e^{-jk\omega t}$, від форми ряду (2) періодичної функції можна перейти до так званої комплексної форми ряду, поширивши розрахунки і на від'ємні значення k .

$$f(\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}_{m(k)} e^{jk\omega t}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17)$$

Комплексною формою ряду Фур'є зручно користуватись для розкладання функцій, які нескладно записати комплексними числами (наприклад, функція, графік, якої зображений на рис. 7. Розрахунок комплексних коефіцієнтів за (16) буде більш простою математичною операцією, ніж знаходження коефіцієнтів тригонометричного ряду за формулами (3).

ПРИКЛАД 3.

Подати рядом Фур'є функцію u , зображену на рис. 8.

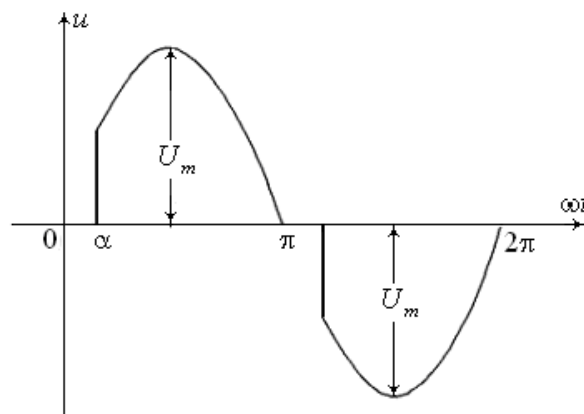


Рис. 8

Криволінійні відрізки графіка є ділянками синусоїди. Функція симетрична відносно осі абсцис, тому обмежимося розглядом її на половині періоду:

$$u \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t \leq \alpha; \\ U_m \sin(\omega t), & \alpha \leq \omega t \leq \pi. \end{cases}$$

На інтервалі $\alpha \leq \omega t \leq \pi$ функція може бути записана за допомогою формул Ейлера у вигляді:

$$u = U_m \sin(\omega t) = U_m \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}).$$

Враховуючи наявність симетрії, для визначення комплексного коефіцієнту ряду обмежимося інтегруванням за півперіоду:

$$\underline{F}_{m(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u e^{-jk\omega t} d(\omega t),$$

$$\underline{F}_{m(k)} = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\pi \frac{U_m}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-jk\omega t} d(\omega t),$$

$$\underline{F}_{m(k)} = \frac{U_m}{2\pi} \left[\frac{e^{-j(k-1)\pi} - e^{-j(k-1)\alpha}}{k-1} - \frac{e^{-j(k+1)\pi} - e^{-j(k+1)\alpha}}{k+1} \right],$$

де $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Для $k=1$ після розкриття невизначеності отримаємо:

$$\underline{F}_{m(1)} = \frac{U_m}{2\pi} \left[-\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - j\left(\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) \right].$$

Для $k=3, 5$ і т.д. комплексні коефіцієнти ряду $\underline{F}_{m(k)}$ можна записати в такому вигляді:

$$\underline{F}_{m(k)} = \frac{U_m}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(k-1)\alpha}{k-1} - \frac{1 - \cos(k+1)\alpha}{k+1} + j \left[\frac{\sin(k-1)\alpha}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\alpha}{k+1} \right] \right]$$

Для від'ємних значень k зміниться тільки знак уявної частини $\underline{F}_{m(k)}$.

Тоді ряд Фур'є досліджуваної функції (рис. 8) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} u(\omega t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}_{m(k)} e^{jk\omega t} = \frac{U_m}{\pi} & \left[\left(\pi - \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \sin \omega t - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cos \omega t \right] + \\ & + \frac{U_m}{\pi} \left[\left(\frac{\sin 4\alpha}{4} - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \sin 3\omega t + \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} \right) \cos 3\omega t \right] + \\ & + \frac{U_m}{\pi} \left[\left(\frac{\sin 6\alpha}{6} - \frac{\sin 4\alpha}{4} \right) \sin 5\omega t + \left(\frac{1 - \cos 4\alpha}{4} - \frac{1 - \cos 6\alpha}{6} \right) \cos 5\omega t \right] + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

За формулою (18) виконані розрахунки коефіцієнтів ряду Фур'є у разі, коли $\alpha = \frac{\pi}{3}$ для 1-ої, 3-ої, 5-ої, 7-ої і 9-ої гармонік. Для вказаного

значення α ряд Фур'є досліджуваної функції має вигляд:

$$\begin{aligned} u(\omega t) = & U_m (0.804 \sin \omega t - 0.238 \cos \omega t) + U_m (-0.207 \sin 3\omega t + 0.119 \cos 3\omega t) + \\ & + U_m (0.069 \sin 5\omega t + 0.1194 \cos 5\omega t) + U_m (0.0344 \sin 7\omega t - 0.06 \cos 7\omega t) + \\ & + U_m (-0.062 \sin 9\omega t + 0.012 \cos 9\omega t) + \dots \end{aligned}$$

Цей же ряд в амплітудо-фазовій формі запишеться так:

$$u(\omega t) = 0.839U_m \sin(\omega t - 0.289) + 0.239U_m \sin(3\omega t + 2.62) + \\ 0.138U_m \sin(5\omega t + 1.047) + 0.069U_m \sin(7\omega t - 1.05) + 0.063U_m \sin(9\omega t + 2.95) + \dots$$

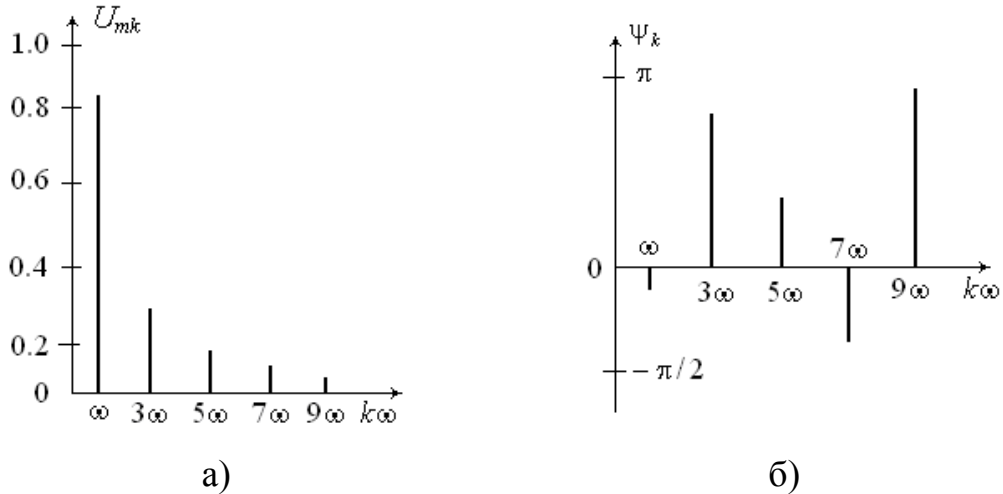


Рис. 9

Амплітудна і фазо-частотна характеристики досліджуваної функції, побудовані на основі проведених розрахунків, зображені на рис. 9 а, б).

На рис. 9 а) приведені відносні значення амплітуд гармонік кривої рис. 8 (у порівнянні зі значеннями U_m); на рис. 9 б) – значення початкових фаз гармонік, виражені в радіанах.

4. ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ПОДАННЯ

Періодичні несинусоїдні функції, які зустрічаються на практиці, можуть бути подані рядом Фур'є наближено з використанням методу числового інтегрування. Графоаналітичне інтегрування застосовується у випадках, коли аналітична апроксимація складна.

Скористаємось одним з простих методів наближеного подання функції рядом Фур'є. Він заснований на властивості періодичної несинусоїдної функції:

$$\begin{aligned}
2m(a_m + a_{3m} + a_{5m} + \dots) &= f(0) - f\left(\frac{\pi}{m}\right) + f\left(\frac{2\pi}{m}\right) - \dots - f\left(\frac{2m-1}{m}\pi\right), \\
2m(b_m - b_{3m} + b_{5m} - \dots) &= f\left(\frac{\pi}{2m}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2m}\right) + f\left(\frac{5\pi}{2m}\right) - \dots - f\left(\frac{4m-1}{2m}\pi\right).
\end{aligned}
\tag{19}$$

для $m=1, 2, 3, \dots$, де $m, 3m, 5m \dots$ – номери гармонік.

Для того, щоб скористатися виразами (19), потрібно визначити число гармонік, які необхідно враховувати. На практиці таку оцінку провести не важко, хоча вона є процесом послідовних наближень. Крім того, якщо взяти занадто мале число гармонік, то коефіцієнти при вищих гармоніках виявляться сумірними з максимальним значенням функції. У такому випадку потрібно збільшити число гармонік і почати обчислення спочатку.

ПРИКЛАД 4.

Подано рядом Фур'є криву напруги (рис. 10), користуючись графоаналітичним способом.

Обмежимося у першому наближенні шістьма гармоніками. Запишемо (19) для $m=5$.

$$\begin{aligned}
10a_5 &= 0 - u\left(\frac{\pi}{5}\right) + u\left(\frac{2\pi}{5}\right) - u\left(\frac{3\pi}{5}\right) + u\left(\frac{4\pi}{5}\right) - u\left(\frac{5\pi}{5}\right) + u\left(\frac{6\pi}{5}\right) - u\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \\
&+ u\left(\frac{8\pi}{5}\right) - u\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -85 + 87 - 89 + 100 - 90 + 53 - 17 - 17 + 30 = -28;
\end{aligned}$$

$$a_5 = -2.8;$$

$$\begin{aligned}
10b_5 &= u\left(\frac{\pi}{10}\right) - u\left(\frac{3\pi}{10}\right) + u\left(\frac{5\pi}{10}\right) - u\left(\frac{7\pi}{10}\right) + u\left(\frac{9\pi}{10}\right) - u\left(\frac{11\pi}{10}\right) + u\left(\frac{13\pi}{10}\right) - \\
&- u\left(\frac{15\pi}{10}\right) + u\left(\frac{17\pi}{10}\right) - u\left(\frac{19\pi}{10}\right) = 57 - 90 + 85 - 97 + 98 - 72 + 36 + 0 - 28 + 19 = 8;
\end{aligned}$$

$$b_5 = 0.8.$$

Коефіцієнти з номерами більше шести $a_{15}, b_{15}, a_{25}, b_{25},$ і т. д. приймаємо рівними нулю.

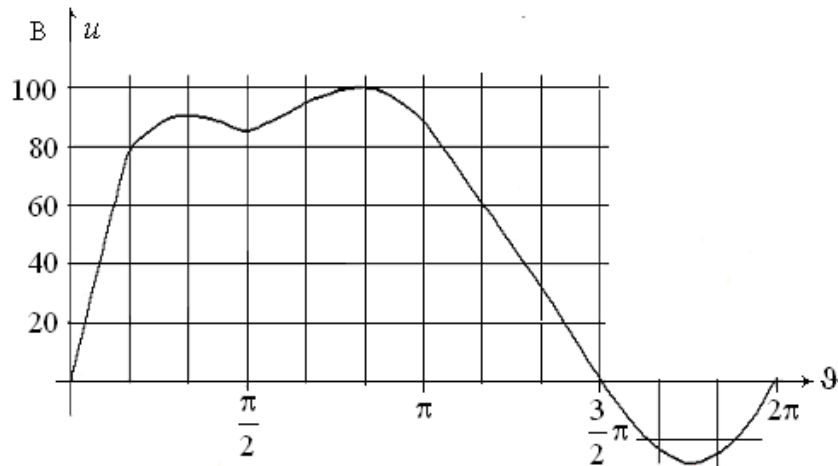


Рис. 10

Амплітуду і фазу п'ятої гармоніки обчислюємо за формулами:

$$U_{m(5)} = \sqrt{a_5^2 + b_5^2} = \sqrt{(-2.8)^2 + 0.8^2} = 2.9 \text{ В};$$

$$\psi_{(5)} = \arctg \frac{a_5}{b_5} = \arctg \frac{-2.8}{0.8} = -74.05^\circ.$$

Амплітуди і початкові фази гармонік:

$$U_{m(6)} = \sqrt{a_{(6)}^2 + b_{(6)}^2} = \sqrt{-1.7^2 + 0.83^2} = 1.89 \text{ В}; \quad \psi_{(6)} = -63.98^\circ;$$

$$U_{m(4)} = \sqrt{-3.4^2 + 2.5^2} = 4.2 \text{ В}; \quad \psi_{(4)} = -53.43^\circ;$$

$$U_{m(3)} = \sqrt{-4.5^2 + 10.8^2} = 11.7 \text{ В}; \quad \psi_{(3)} = -22.6^\circ;$$

$$U_{m(2)} = \sqrt{2.97^2 + 17.1^2} = 17.3 \text{ В}; \quad \psi_{(2)} = 9.82^\circ;$$

$$U_{m(1)} = \sqrt{-38^2 + 52.5^2} = 64.6 \text{ В}; \quad \psi_{(1)} = -35.7^\circ.$$

Розрахунок інших гармонік зведемо в Таблицю 1.

Таблиця 1.

Знак a, b	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	Σ	Коефіц.
$12a_6$	0	80	89	85	94	100	89	59	29	0	-26	-28	-20	-1.7
$8a_4$	0	89	85	99	90	44	0	-30					-27	-3.4
$6a_3$	0	90	95	89	30	-27							-27	-4.5
$4(a_2+a_6)$	0	85	90	0									5	2.97
$2(a_1+a_3+a_5)$	0	90											-90	-38
$12b_6$	48	89	87	88	99	97	75	49	15	-15	-30	-17	10	0.83
$8b_4$	68	88	91	99	67	22	-21	-24					20	2.5
$6b_3$	80	85	100	58	0	-28							65	10.8
$4(b_2-b_6)$	89	99	45	-30									65	17.1
$2(b_1-b_3+b_5)$	85	0											85	52.5

Постійну складову знайдемо з виразу:

$$U_{(0)} \cong \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u(n \frac{2\pi}{m}), \quad m=12;$$

$$U_{(0)} = \frac{1}{12} (80 + 89 + 85 + 94 + 100 + 89 + 59 + 29 - 26 - 28) = \frac{571}{12} = 47.58 \text{ В.}$$

З урахуванням отриманих значень $U_{m(k)}$ та $\psi_{(k)}$ ряд Фур'є для кривої напруги (рис. 10) має вигляд:

$$u(\omega t) = 47.58 + 64.6 \sin(\omega t - 35,7^\circ) + 17,3 \sin(2\omega t + 9,82^\circ) + \\ + 11,7 \sin(3\omega t - 22,6^\circ) + 4,2 \sin(4\omega t - 53,43^\circ) + 1,89 \sin(6\omega t - 63,98^\circ) + \dots$$

5. РОЗРАХУНОК ЛІНІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА З ПЕРІОДИЧНИМИ НЕСИНУСОЇДНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ЕНЕРГІЇ

Розрахунок миттєвих значень струмів у лінійному електричному колі з періодичними несинусоїдними джерелами енергії базується на використанні принципу накладання і відомих положень теорії аналізу кіл з постійними та синусоїдними джерелами енергії. Можна рекомендувати таку послідовність розрахунку:

1. Подання несинусоїдних ЕРС чи струмів джерел енергії рядом Фур'є. Коефіцієнти ряду визначаються за формулами (3), якщо функція ЕРС чи струму на періоді вказана аналітично. Якщо ж рівняння функції невідоме, а є тільки її часовий графік, коефіцієнти ряду визначаються наближено за формулами (4).

2. Обмеження нескінченного ряду функції ЕРС чи струму джерела енергії сталою складовою (якщо вона є) і 3–4 гармонічними складовими, амплітуди яких переважають. Схеми заміщення гілки з несинусоїдною ЕРС $e(t)$ та гілки з джерелом несинусоїдного струму $j(t)$ приведені на рис. 11 а, б.

У відповідності з розрахунковими схемами рис. 11, дія на електричне коло несинусоїдної ЕРС $e(t)$ чи несинусоїдного джерела струму $j(t)$ адекватна дії кількох послідовно з'єднаних ЕРС ($E_0, e_1(t), \dots, e_n(t)$) чи кількох паралельно з'єднаних ДС ($J_0, j_1(t), \dots, j_n(t)$).

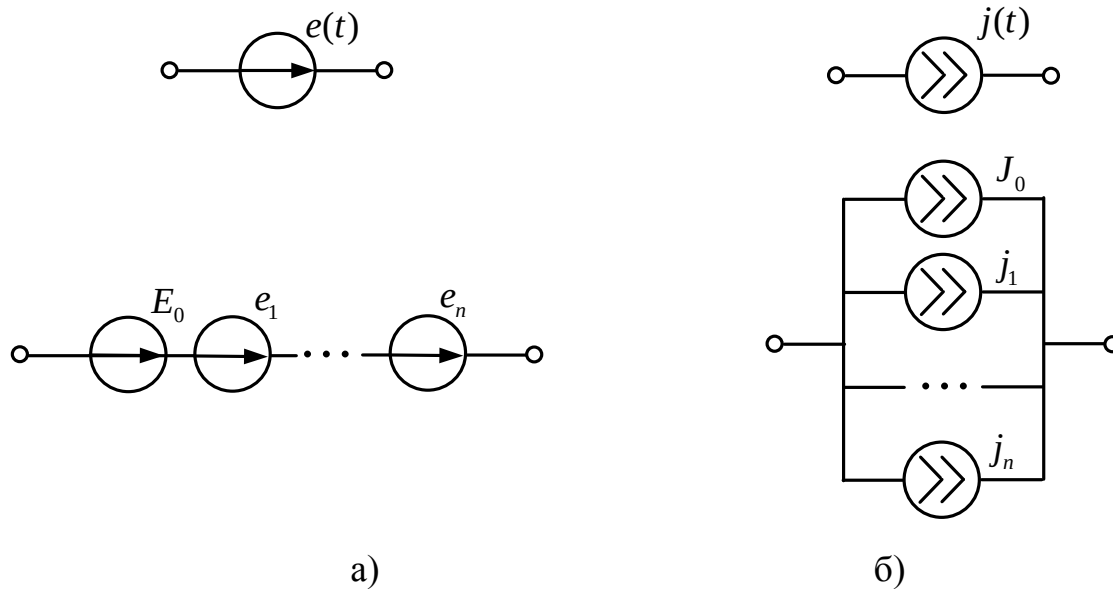


Рис. 11

3. Використання для лінійного кола принципу накладання дії джерел енергії та розрахунок часткових струмів у кожній гілці по черзі: від сталих складових ($E_{(0)}, J_{(0)}$), від складових основної частоти ($e_{(1)}, j_{(1)}$), від гармонічних складових вищого порядку. Розраховуючи коло для сталих складових необхідно пам'ятати, що опір індуктивних елементів для постійного струму дорівнює нулю, а ємнісні елементи мають нескінченно великий опір. Таким чином, на індуктивних елементах не буде напруг сталих складових, а у гілках з ємностями – не буде постійних струмів.

Розрахунок електричного кола з діючими гармонічними складовими джерел енергії може бути виконаний за допомогою методу комплексних амплітуд. Одне і теж коло розраховується стільки разів, скільки гармонічних складових різних частот є в діючих джерелах енергії. При цьому потрібно враховувати залежність опорів реактивних елементів від частоти:

$$X_{L(1)} = \omega L, \quad X_{L(k)} = k\omega L = kX_{L(1)};$$

$$X_{C(1)} = 1/\omega C, \quad X_{C(k)} = 1/k\omega C = X_{C(1)}/k.$$

4. Накладання дії складових джерел енергії та знаходження миттєвих струмів і напруг кожної гілки. Миттєве значення струму гілки є сумою миттєвих значень окремих складових (сталої і гармонічних):

$$i = I_{(0)} + i_{(1)} + \dots + i_{(n)}.$$

ПРИКЛАД 5.

Розрахувати миттєві струми в колі рис. 12. Параметри елементів кола відомі: $R=30$ Ом, $L=10$ мГн, $C=10$ мкФ. У колі діє періодична несинусоїдна ЕРС, графік зміни ЕРС зображений на рис. 13; $E_m=120$ В, кутова частота першої гармоніки $\omega=1000$ рад/с.

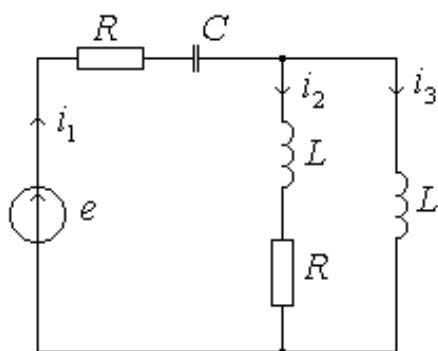


Рис. 12

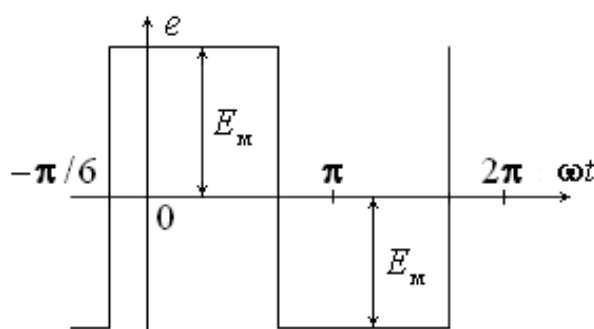


Рис. 13

Графік функції $e(\omega t)$, зображеної на рис. 13, відрізняється від графіка функції $e(\omega t)$, зображеної на рис. 5, тим, що початок відліку часу на рис. 13 зміщено відносно початку відліку часу на рис. 5 праворуч на кут $\beta=\pi/6$. Функція, зображена на рис. 5, симетрична відносно початку координат і осі абсцис, тому її ряд Фур'є має тільки непарні синусні складові:

$$e(\omega t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} E_{mk} \sin k\omega t.$$

З урахуванням зміщення початку відліку часу для функції рис. 13 ряд Фур'є для неї прийме такий вигляд:

$$e(\omega t) = \sum_{k=1,3,5...}^{\infty} E_{mk} \sin k(\omega t + \frac{\pi}{6}). \quad (20)$$

Амплітуда ЕРС k -ої гармоніки E_{mk} визначалась раніше (14*) і відповідно дорівнює

$$E_{mk} = \frac{4E_M}{\pi k}, \quad k = 1, 3, 5...$$

З врахуванням (20) і вказаного в умові значення $E_M=120$ В отримаємо такий ряд Фур'є для заданої ЕРС:

$$\begin{aligned} e(\omega t) \cong & 153 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 51 \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + 30.6 \sin(5\omega t + \frac{5\pi}{6}) + \\ & + 21.9 \sin(7\omega t + \frac{7\pi}{6}) + \end{aligned} \quad (20^*)$$

Амплітуди складових ряду зі зростанням номеру гармоніки зменшуються. Тому обмежимося першими трьома ненульовими гармоніками. Постійна складова відсутня.

$$e(\omega t) \approx e_{(1)} + e_{(3)} + e_{(5)} = e_{\Sigma}$$

Часові графіки 1-ої, 3-ої, 5-ої гармонік ЕРС і їх результуюча крива e_{Σ} зображені на рис. 14.

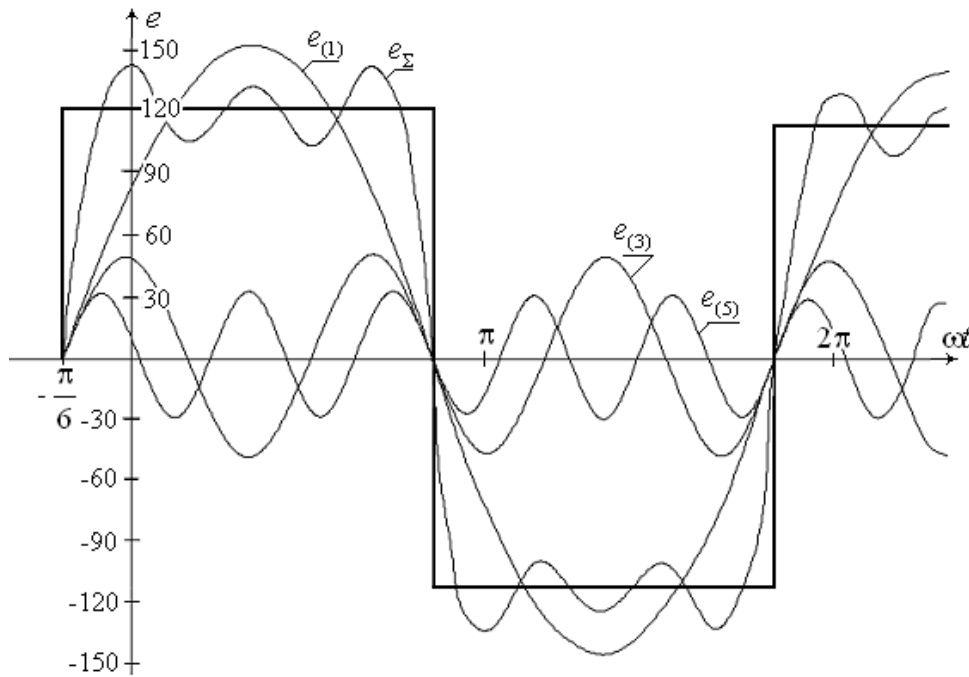


Рис. 14

Розрахунок струмів, обумовлених кожною складовою ЕРС ($e_{(1)}$, $e_{(3)}$, $e_{(5)}$), виконаємо, використовуючи комплексну форму запису рівнянь кола.

Комплексний опір кола (рис. 12) для k -ої гармоніки дорівнює:

$$\underline{Z}(k) = R + \frac{1}{jk\omega C} + \frac{jk\omega L(R + jk\omega L)}{R + j2k\omega L} = Z(k)e^{j\varphi_k}$$

Розрахунок комплексних струмів від дії основної гармоніки ЕРС:

$$e_{(1)} = 153 \sin(\omega t + \pi/6), \quad E_{(1)} = \frac{153}{\sqrt{2}} \cong 108 \text{ В}, \quad \dot{E}_{(1)} = 108e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L(R + j\omega L)}{R + j2\omega L},$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(1)} &= 30 + \frac{10^6}{j10^3 \cdot 10} + \frac{j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}(30 + j10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3})}{30 + j \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 30 - j100 + \frac{j10(30 + j10)}{30 + j20} = 30 - j100 + \frac{j10 \cdot 31.6e^{j18.4^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = \\ &= 30 - j100 + 8.75e^{j74.7^\circ} = 32.3 - j91.6 = 97.1e^{-j70.6^\circ} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{E}_{(1)}}{Z_{(1)}} = \frac{108e^{j30^\circ}}{97.1e^{-j70.6^\circ}} = 1.11e^{j100.6^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{j\omega L}{R + j2\omega L} = 1.11e^{j100.6^\circ} \frac{10e^{j90^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = 0.307e^{j157^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{3(1)} = \dot{I}_{1(1)} \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L} = 1.11e^{j100.6^\circ} \frac{31.6e^{j18.4^\circ}}{36.1e^{j33.7^\circ}} = 0.972e^{j85.3^\circ} \text{ A}.$$

Розрахунок комплексних струмів від дії 3-ої гармонічної ЕРС:

$$e_{(3)} = 51\sin(3\omega t + \pi/2), \quad E_{(3)} = \frac{51}{\sqrt{2}} = 36.1 \text{ В}, \quad \dot{E}_{(3)} = 36.1e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\begin{aligned} Z_{(3)} &= R + \frac{1}{j3\omega C} + \frac{j3\omega L(R + j3\omega L)}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 30 - j33.3 + \frac{j30(30 + j30)}{30 + j60} = \\ &= 30 - j33.3 + \frac{j30 \cdot 42.4e^{j45^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 30 - j33.3 + 19e^{j71.6^\circ} = \\ &= 36 - j15.3 = 39.1e^{-j23^\circ} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{E}_{(3)}}{Z_{(3)}} = \frac{36e^{j90^\circ}}{39.1e^{-j23^\circ}} = 0.923e^{j113^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \dot{I}_{1(3)} \frac{j3\omega L}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 0.923e^{j113^\circ} \frac{30e^{j90^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 0.413e^{j139.6^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{3(3)} = \dot{I}_{1(3)} \frac{R + j3\omega L}{R + j2 \cdot 3\omega L} = 0.923e^{j113^\circ} \frac{42.4e^{j45^\circ}}{67.1e^{j63.4^\circ}} = 0.583e^{j94.6^\circ} \text{ A}.$$

Розрахунок комплексних струмів від дії 5-ої гармонічної ЕРС:

$$e_{(5)} = 30.6\sin(5\omega t + 150^\circ), \quad E_{(5)} = \frac{30.6}{\sqrt{2}} = 21.6 \text{ В},$$

$$\dot{E}_{(5)} = 21.6e^{j150^\circ} \text{ В};$$

$$Z_{(5)} = R + \frac{1}{j5\omega C} + \frac{j5\omega L(R + j5\omega L)}{R + j2 \cdot 5\omega L},$$

$$\begin{aligned} Z_{(5)} &= 30 - j20 + \frac{j50(30 + j50)}{30 + j100} = 30 - j20 + \frac{j50 \cdot 58.3e^{j59^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = \\ &= 30 - j20 + 27.9e^{j75.7^\circ} = 36.9 + j7 = 37.6e^{j10.7^\circ} \text{ Ом}, \end{aligned}$$

$$\dot{I}_{1(5)} = \frac{\dot{E}_{(5)}}{Z_{(5)}} = \frac{21.6e^{j150^\circ}}{37.6e^{j10.7^\circ}} = 0.574e^{j139.3^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{2(5)} = \dot{I}_{1(5)} \frac{j5\omega L}{R + j2 \cdot 5\omega L} = 0.574e^{j139.3^\circ} \frac{50e^{j90^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = 0.275e^{j156^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{3(5)} = \dot{I}_{1(5)} \frac{R + j5\omega L}{R + j2 \cdot 5\omega L} = 0.574e^{j139.3^\circ} \frac{58.3e^{j59^\circ}}{104.4e^{j73.3^\circ}} = 0.320e^{j125^\circ} \text{ A}.$$

Миттєві значення струмів гілок:

$$i_1 = 1.11\sqrt{2} \sin(\omega t + 100.6^\circ) + 0.923\sqrt{2} \sin(3\omega t + 113^\circ) + 0.574\sqrt{2} \sin(5\omega t + 139.3^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 0.307\sqrt{2} \sin(\omega t + 157^\circ) + 0.413\sqrt{2} \sin(3\omega t + 139.6^\circ) + 0.275\sqrt{2} \sin(5\omega t + 156^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 0.972\sqrt{2} \sin(\omega t + 85.3^\circ) + 0.583\sqrt{2} \sin(3\omega t + 94.6^\circ) + 0.320\sqrt{2} \sin(5\omega t + 125^\circ) \text{ A}.$$

6. ДІЮЧІ І СЕРЕДНІ ЗНАЧЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ НЕСИНУСОЇДНИХ СТРУМІВ І НАПРУГ

Діючі (середньоквадратичні) значення періодичних несинусоїдних струмів і напруг визначають за відомими співвідношеннями:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}. \quad (21)$$

Якщо періодична несинусоїдна функція струму (напруги) подана у вигляді тригонометричного ряду

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k),$$

тоді діюче значення цієї функції можна також обчислити за діючими значеннями її складових:

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}. \quad (22)$$

В формулі (22) A_k – діюче значення струму (напруги) k -ої складової. При цьому сталу складову A_0 вважаємо діючим значенням нульової гармоніки. Формула містить теоретично необмежено велику кількість складових. Тому отримати точні відповіді для діючих значень струму чи напруги за (22) неможливо. Точні значення отримуємо тільки за формулами (21), якщо функція струму чи напруги подана на періоді аналітичним рівнянням. Середнє за період значення струму (напруги) можна обчислити, скориставшись відомою математичною формулою:

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) d(\omega t). \quad (23)$$

Порівнюючи формулу (23) з отриманою раніше формулою (3) для сталої складової, бачимо, що середнє значення періодичної функції дорівнює її сталій складовій. Приймаючи до уваги, що симетричні відносно осі абсцис функції не мають сталої складової (відповідно $I_0=0$), для таких функцій визначають середнє за модулем значення:

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |i(t)| dt. \quad (24)$$

ПРИКЛАД 6.

Визначити діюче і середнє за модулем значення ЕРС, графік якої зображений на рис. 13, а також діючі значення струмів I_1 , I_2 , I_3 у колі рис. 12 (приклад 5).

Діюче значення ЕРС за формулою (21)

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_{-T/12}^{5T/12} E_M^2 dt + \int_{5T/12}^{11T/12} (-E_M)^2 dt \right]} = E_M = 120 \text{ В.}$$

Діюче значення ЕРС через діючі значення складових тригонометричного ряду (20*):

$$E \cong \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{153^2 + 51^2 + 30.6^2} = 116 \text{ В.}$$

Останній результат дещо менший, ніж попередній ($116 < 120$), тому що в останньому варіанті враховані тільки три гармоніки нескінченного тригонометричного ряду. Середнє за модулем значення ЕРС дорівнює:

$$E_C = \frac{2}{T} \int_{-T/12}^{5T/12} E_M dt = E_M = 120 \text{ В.}$$

Діючи значення струмів I_1 , I_2 , I_3 у колі рис. 12 знаходимо, скориставшись розрахованими в прикладі 5 комплексами цих струмів:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2 + I_{1(5)}^2} = \sqrt{1.11^2 + 0.923^2 + 0.574^2} = 1.55 \text{ А,}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2 + I_{2(5)}^2} = \sqrt{0.307^2 + 0.413^2 + 0.275^2} = 0.583 \text{ А,}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2 + I_{3(5)}^2} = \sqrt{0.972^2 + 0.583^2 + 0.320^2} = 1.18 \text{ А.}$$

7. ПОТУЖНІСТЬ У КОЛАХ НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Активна потужність періодичного несинусоїдного струму визначається, як і для синусоїдного струму, середнім за період значенням миттєвої потужності $p = ui$, тобто маємо:

$$P = P_C = \frac{1}{T} \int_0^T uidt.$$

Якщо миттєвий струм і напруга подані тригонометричними рядами:

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \psi_{ik}),$$

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \psi_{uk}),$$

то активну потужність несинусоїдного струму можна визначити як суму активних потужностей його складових:

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k. \quad (25)$$

Тут φ_k – кут зсуву фаз між напругою і струмом k -ої гармоніки: $\varphi_k = \psi_{uk} - \psi_{ik}$. Подібно до кола синусоїдного струму, формально за аналогією з активною потужністю, може бути введено поняття реактивної потужності несинусоїдного струму як суми реактивних потужностей гармонічних складових струму:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k. \quad (26)$$

Якщо складові активної потужності пасивного двополюсника всі додатні, то складові його реактивної потужності – алгебричні величини: індуктивна реактивна потужність додатна, ємнісна – від'ємна.

Як для кола синусоїдного струму, так і для несинусоїдного режиму повна потужність кола (гілки) визначається як добуток діючого значення струму на діюче значення напруги:

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \quad (27)$$

Для кола синусоїдного струму повна, активна і реактивна потужності пов'язані відомим співвідношенням:

$$S^2 = P^2 + Q^2. \quad (28)$$

Для кола з несинусоїдним струмом співвідношення (28) в більшості випадків не виконується: $S^2 > P^2 + Q^2$.

Якщо в колі з несинусоїдним струмом є реактивні елементи (індуктивності, ємності), то рівняння для потужностей кола записують так:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2. \quad (29)$$

Величину $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ називають потужністю спотворення несинусоїдного струму. Потужність спотворення з'являється на ділянках, де криві струму і напруги відрізняються формою. На активних опорах форми кривих струму і напруги однакові і потужність спотворення, а також реактивна потужність дорівнюють нулю.

ПРИКЛАД 7.

Визначити активну, реактивну, повну і потужність спотворення джерела ЕРС у колі рис. 12 (приклад 5). Скласти баланс активних потужностей.

Миттєві значення ЕРС і струму джерела (приклад 5) дорівнюють:

$$e(\omega t) = 108\sqrt{2} \sin(\omega t + 30^\circ) + 36.1\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) + 21.6\sqrt{2} \sin(5\omega t + 150^\circ) \text{ В},$$

$$i_1(\omega t) = 1.11\sqrt{2} \sin(\omega t + 100.6^\circ) + 0.923\sqrt{2} \sin(3\omega t + 113^\circ) + 0.574\sqrt{2} \sin(5\omega t + 139.3^\circ) \text{ А}.$$

Активна потужність джерела енергії:

$$P_{\text{дж}} = E_{(1)} I_{(1)} \cos \varphi_{(1)} + E_{(3)} I_{(3)} \cos \varphi_{(3)} + E_{(5)} I_{(5)} \cos \varphi_{(5)}. \quad (30)$$

У формулі (30) $\varphi_{(1)}, \varphi_{(3)}, \varphi_{(5)}$ – кути зсуву фаз між гармонічними складовими ЕРС джерела і складовими струму гілки, де знаходиться джерело ЕРС, відповідно для 1-ої, 3-ої та 5-ої гармонік: $\varphi_k = \psi_{e(k)} - \psi_{i_1(k)}$.

Тоді матимемо:

$$\varphi_{(1)} = 30^\circ - 100.6^\circ = -70.6^\circ,$$

$$\varphi_{(3)} = 90^\circ - 113^\circ = -23^\circ,$$

$$\varphi_{(5)} = 150^\circ - 139.3^\circ = 10.7^\circ.$$

З урахуванням діючих значень гармонічних складових ЕРС, складових струму 1-ої гілки та кутів зсуву фаз між ними отримаємо:

$$\begin{aligned} P_{\text{дж}} &= 108 \cdot 1.11 \cos(-70.6^\circ) + 36.1 \cdot 0.923 \cos(-23^\circ) + 21.6 \cdot 0.574 \cos 10.7^\circ = \\ &= 39.8 + 30.6 + 12.2 = 82.6 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Реактивна потужність джерела ЕРС:

$$\begin{aligned} Q_{\text{дж}} &= E_{(1)} I_{(1)} \sin \varphi_{(1)} + E_{(3)} I_{(3)} \sin \varphi_{(3)} + E_{(5)} I_{(5)} \sin \varphi_{(5)} = \\ &= 108 \cdot 1.11 \sin(-70.6^\circ) + 36.1 \cdot 0.923 \sin(-23^\circ) + 21.6 \cdot 0.574 \sin 10.7^\circ = \\ &= -113.1 - 13.0 + 2.3 = -123.8 \text{ ВАр}. \end{aligned}$$

Повна потужність джерела ЕРС:

$$S_{\text{дж}} = E \cdot I_1 = 116 \cdot 1.55 = 179.8 \text{ ВА}.$$

Діючі значення ЕРС і струмів розраховані в прикладі 3.6. Потужність спотворення на входних затискачах електричного кола:

$$T_{дж} = \sqrt{S_{дж}^2 - P_{дж}^2 - Q_{дж}^2} = \sqrt{(179.8)^2 - (82.6)^2 - (-123.8)^2} \cong 100.9 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Активна потужність, яка надходить у гілки кола рис. 12:

$$P_{сп} = RI_1^2 + RI_2^2 = 30 \cdot 1.55^2 + 30 \cdot 0.583^2 \cong 82.3 \text{ Вт}$$

Баланс активних потужностей кола виконується : $P_{дж} \cong P_{сп}$.

8. КОЕФІЦІЄНТИ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ ПЕРІОДИЧНІ НЕСИНУСОЇДНІ СТРУМИ ТА НАПРУГИ

Коефіцієнт форми є відношення діючого значення до середнього за модулем:

$$k_{\phi} = \frac{I}{I_c} \quad (31)$$

Коефіцієнт амплітуди – відношення максимального значення до діючого:

$$k_a = \frac{I_{\max}}{I}. \quad (32)$$

Коефіцієнт спотворення – відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$k_{сп} = \frac{I_{(1)}}{I} \quad (33)$$

Коефіцієнт гармонік – відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

$$k_r = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{(k)}^2}}{I_{(1)}}. \quad (34)$$

Всі ці коефіцієнти, як правило, розраховують для кривих, що не містять постійної складової. Для таких кривих:

$$k_r = \frac{1}{k_{сп}} \sqrt{1 - k_c^2}$$

За аналогією з колами синусоїдного струму відношення активної потужності до повної називають *коефіцієнтом потужності*, а інколи прирівнюють до косинуса деякого умовного кута Θ .

$$\lambda = \frac{P}{UI} = \cos \Theta. \quad (35)$$

Можна дати геометричну інтерпретацію куту Θ , використовуючи поняття еквівалентних синусоїд струму і напруги, діючі значення яких дорівнюють діючим значенням несинусоїдних величин, а частота дорівнює частоті першої гармоніки. Якщо між еквівалентними синусоїдами напруги і струму встановити кут Θ , то активна потужність, що виділяється у колі, дорівнює активній потужності несинусоїдного струму. Знак кута Θ приймається таким, як і знак реактивної потужності кола для першої гармоніки.

Для кривих, які мають постійну складову, розраховують *коефіцієнт пульсацій* – відношення діючого значення гармонічних складових напруги (струму) до середнього значення напруги (струму):

$$k_{\text{п}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)}^2}}{U_{\text{с}}} \quad (36)$$

Прилади (амперметри, вольтметри), у залежності від системи, реагують на різні значення величин, що вимірюються:

- а) прилади *магнітоелектричної системи* – на середнє за період значення величини, що вимірюється;
- б) прилади *детекторної системи* (магнітоелектричні з випрямлячами) – на середнє за модулем значення величини, що вимірюється;
- в) прилади *теплової, електромагнітної і електродинамічної систем* – на діюче значення величини, що вимірюється;

г) *електронні прилади* – у залежності від пристроїв вхідного перетворювача – на середнє за модулем, діюче, середнє за період, максимальне або мінімальне значення вимірюваної величини.

У більшості випадків шкали приладів градууються для вимірювання діючого значення напруги (струму) синусоїдної форми. Тому при вимірах таким приладом у колах несинусоїдної напруги (струму) необхідно вводити відповідні поправки.

ПРИКЛАД 8.

Покази приладу детекторної системи для кривої (рис.15): $U_{\text{пр}} = 1.11U_c = 111 \text{ В}$, де 1.11 – коефіцієнт форми для синусоїдної напруги. Діюче і середнє значення цієї кривої $U = U_c = 100 \text{ В}$, $k_{\text{ф}} = 1$.

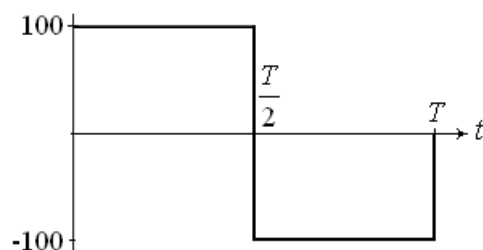


Рис. 15

Покази приладу, що реагує на амплітудне значення: $U_{\text{пр}} = \frac{U_m}{1.41} = 70.7 \text{ В}$, де 1.41 – коефіцієнт амплітуди для синусоїди. Діюче значення вимірюваної напруги визначається з урахуванням поправки, яка дорівнює коефіцієнту амплітуди кривої напруги:

$$U = \frac{1.41U_{\text{пр}}}{k_a}.$$

9. ВПЛИВ ІНДУКТИВНИХ І ЄМНІСНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ФОРМУ КРИВОЇ СТРУМУ У РАЗІ НЕСИНУСОЇДНОЇ НАПРУГИ

Опір індуктивних і ємнісних елементів кола залежить від частоти і, відповідно, він буде різним для різних гармонік. Тому, якщо на затискачах

кола з реактивними елементами діє періодична несинусоїдна напруга, крива струму кола буде відрізнятися формою від кривої напруги.

Форми кривих струму та напруги подібні тільки на ділянці з активним опором R , однаковим для всіх частот. Тоді діюче значення напруги для будь-якої гармоніки $U_{R(k)} = RI_{(k)}$ і, відповідно, $\frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} = \frac{U_{R(k)}}{U_{R(1)}}$,

тобто забезпечується пропорційність між амплітудами струму та напруги для всіх гармонік. Виконання цієї умови особливо необхідне для обмоток електровимірювальних приладів: амперметрів, вольтметрів, ватметрів, призначених для використання в електричних колах змінного струму. Для зменшення індуктивності та міжвиткових ємностей обмотки вимірювального приладу застосовуються спеціальні технічні рішення, які суттєво зменшують індуктивність і ємність обмотки та забезпечують незмінність опору обмотки для широкого діапазону частот.

Нехай тепер маємо індуктивний елемент кола, індуктивність якого L . Реактивний опір цього елемента на частоті $k\omega$ для k -ї гармоніки струму $X_{L(k)} = k\omega L$, тобто зростає із зростанням номеру гармоніки. Тоді матимемо:

$$U_{L(k)} = k\omega LI_{(k)}; \quad \frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} = \frac{1}{k} \frac{U_{L(k)}}{U_{L(1)}}.$$

Таким чином, відношення амплітуди k -ої гармоніки в кривій струму до амплітуди 1-ї гармоніки в k разів менше, ніж відношення відповідних амплітуд у кривій напруги, тобто вищі гармоніки будуть більш помітні в кривій напруги індуктивності.

Далі розглянемо ємнісний елемент кола, ємність якого C . Реактивний опір ємності $X_{C(k)} = \frac{1}{k\omega C}$ зменшується із зростанням номеру гармоніки. Відповідно матимемо:

$$I_{(k)} = k\omega CU_{C(k)}; \quad \frac{I_{(k)}}{I_{(1)}} = k \frac{U_{C(k)}}{U_{C(1)}},$$

тобто в кривій струму через ємність відношення амплітуди k -ої гармоніки до амплітуди 1-ї гармоніки в k разів більше, ніж відношення відповідних амплітуд у кривій напруги і, таким чином, вищі гармоніки будуть більш помітні в кривій струму ємності.

Якщо складне коло має крім активних елементів ще котушки індуктивностей та конденсатори, то на форму кривої струму буде також впливати схема з'єднань елементів. Більш помітною в кривій струму чи напруги ділянки кола буде та гармоніка, для якої виконуються певні резонансні співвідношення.

10. РЕЗОНАНС В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ З НЕСИНУСОЇДНОЮ ЕРС

Резонансом називають такий стан електричного кола синусоїдного струму з котушками індуктивності і конденсаторами, в якому вхідний струм співпадає за фазою з напругою. В цьому стані вхідний реактивний опір кола чи його вхідна реактивна провідність дорівнюють нулю.

Вказана умова має місце за певних співвідношень параметрів кола і частоти зміни струму.

У разі несинусоїдного струму явище резонансу ускладнюється; можливе виникнення резонансного стану кола на частоті будь-якої із гармонічних складових струму. Настання резонансу в електричному колі з малим активним опором найчастіше супроводжується суттєвим збільшенням складових струму і напруги резонансної гармоніки на окремих ділянках кола.

Якщо електричне коло має декілька індуктивних і ємнісних елементів і живиться від джерела несинусоїдної напруги, то в такому колі можуть одночасно існувати і резонанс напруг, і резонанс струмів. Умовою резонансу напруг є рівність нулю реактивного опору послідовно з'єднаних ділянок кола L – C на резонансній частоті, а умовою резонансу струмів є

рівність нулю реактивної провідності паралельно з'єднаних гілок з індуктивністю і ємністю. Більш поглиблений аналіз проведено на конкретному прикладі.

ПРИКЛАД 9.

Записати умову резонансу кола (рис. 12, приклад 5) для k -ої гармоніки. Розрахувати значення ємності з умови резонансу кола для 3-ої гармоніки. Визначити вхідний опір кола для цієї гармоніки при резонансі.

Вхідний опір кола, зображеного на рис. 12, для k -ої гармоніки:

$$\begin{aligned} Z_{-(k)} = R - j \frac{1}{k\omega C} + \frac{jk\omega L(R + jk\omega L)}{R + j2k\omega L} = R + \frac{R(k\omega L)^2}{R^2 + (2k\omega L)^2} + \\ + j \left[\frac{R^2 k\omega L + 2(k\omega L)^3}{R^2 + (2k\omega L)^2} - \frac{1}{k\omega C} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В електричному колі буде резонанс для k -ої гармонічної, якщо вхідний реактивний опір для цієї складової дорівнює нулю:

$$X_{(k)} = \frac{R^2 k\omega L + 2(k\omega L)^3}{R^2 + (2k\omega L)^2} - \frac{1}{k\omega C} = 0. \quad (38)$$

З умови резонансу (38) для резонансної ємності маємо:

$$C_{\text{рез}(k)} = \frac{R^2 + 2(k\omega L)^2}{k\omega (R^2 k\omega L + 2(k\omega L)^3)} \quad (39)$$

Значення параметрів кола у прикладі 5: $R=30$ Ом, $L=10$ мГн, $\omega=1000$ рад/с. Тоді для $k=3$ отримаємо:

$$\begin{aligned} C_{\text{рез}(3)} &= \frac{30^2 + (2 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2})^2}{3 \cdot 1000 (30^2 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2} + 2(3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2})^3)}, \\ C_{\text{рез}(3)} &= 18.52 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 18.52 \text{ мкФ}. \end{aligned}$$

Вхідний опір кола для 3-ої гармоніки при резонансі (дійсна частина

$Z_{-(k)} \Big|_{k=3}$ формули (37)):

$$Z_{-\text{рез}(3)} = R + \frac{R(k\omega L)^2}{R^2 + (2k\omega L)^2} = 30 + \frac{30(3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2})^2}{30^2 + (2 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 10^{-2})^2} = 36 \text{ Ом.}$$

Якщо електричне коло має декілька індуктивних і ємнісних елементів і живиться від джерела несинусоїдної напруги, то в такому колі можуть одночасно існувати і резонанс напруг, і резонанс струмів. Умовою резонансу напруг є рівність нулю реактивного опору послідовно з'єднаних ділянок кола $L - C$ на резонансній частоті, а умовою резонансу струмів є рівність нулю реактивної провідності паралельно з'єднаних гілок з індуктивністю і ємністю. Більш поглиблений аналіз проведено на конкретному прикладі.

ПРИКЛАД 10.

На входних затискачах кола (рис. 16) діє несинусоїдна напруга:

$$u = 50 + 120\sqrt{2}\sin 100t + 20\sqrt{2}\sin 300t \text{ В.}$$

Параметри кола:

$$R = 10 \text{ Ом}, \quad L_1 = 0.15 \text{ Гн}, \quad L_3 = 0.35 \text{ Гн}.$$

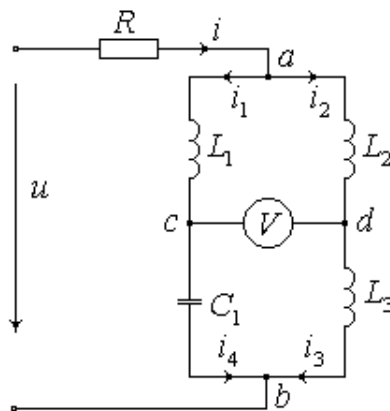


Рис. 16

На частоті $\omega = 100$ рад/с у колі має місце резонанс струмів, а на частоті $3\omega = 300$ рад/с у гілці $L_1 - C_1$ – резонанс напруг. Визначити показ вольметра електромагнітної системи і активну потужність кола P .

1. Спочатку визначається ємність C_1 першої гілки з умови резонансу напруг на частоті $3\omega = 300$ рад/с. При цьому реактивні опори елементів L_1 і C_1 на частоті 3ω повинні бути однакові:

$$3\omega L_1 = \frac{1}{3\omega C_1}; \quad C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1};$$

$$C_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^4 \cdot 0.15} = 74.074 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

2. На частоті $\omega = 100 \text{ рад/с}$ у колі резонанс струмів. Це означає, що провідність гілки $L_1 - C_1$ на цій частоті дорівнює провідності гілки $L_2 - L_3$. Тоді маємо:

$$\frac{1}{\omega(L_2 + L_3)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C_1} - \omega L_1}; \quad \frac{1}{100(L_2 + 0.35)} = \frac{1}{135 - 15};$$

$$100(L_2 + 0.35) = 120; \quad L_2 = 0.85 \text{ Гн.}$$

3. Після визначення параметрів схеми (C_1 і L_2) розраховуємо струми гілок. Розрахунок струмів виконуємо окремо для кожної складової вхідної напруги.

3.1. Діє постійна складова $U_{(0)} = 50 \text{ В}$.

$$I_{(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = 5 \text{ А}; \quad I_{1(0)} = I_{4(0)} = 0; \quad P_{(0)} = I_{(0)}^2 R = 250 \text{ Вт.}$$

У показі вольтметра постійної складової не буде, бо різниця потенціалів точок c і d для постійної складової $U_{cd(0)} = 0$.

3.2. Діє складова частоти $\omega = 100 \text{ рад/с}$ (перша гармоніка)

$$u_{(1)} = 120\sqrt{2} \sin 100t \text{ В.}$$

На частоті ω у колі резонанс струмів. Це означає, що опір паралельно з'єднаних гілок $L_1 - C_1$ і $L_2 - L_3$ дорівнює нескінченності, тобто $Z_{ab(1)} = \infty$. Тоді вхідний струм першої гармоніки $I_{(1)} = 0$, спад напруги на резисторі R відсутній $U_{R(1)} = RI_{(1)} = 0$. Таким чином, напруга 1-ї гармоніки $u_{(1)}$ буде діяти безпосередньо на затискачах ab :

$$u_{ab(1)} = u_{(1)} = 120\sqrt{2} \sin 100t \text{ В,}$$

$$\underline{Z}_{acb(1)} = j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = j15 - j135 = -j120 \quad \text{Ом},$$

$$\underline{Z}_{adb(1)} = j\omega L_2 + j\omega L_3 = j85 + j35 = j120 \quad \text{Ом}.$$

Комплексні струми паралельних гілок 1-ї гармоніки:

$$\dot{I}_{1(1)} = \dot{I}_{4(1)} = \frac{\dot{U}_{ab(1)}}{\underline{Z}_{acb(1)}} = \frac{120}{-j120} = j \cdot 1 \quad \text{А},$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \dot{I}_{3(1)} = \frac{\dot{U}_{ab(1)}}{\underline{Z}_{adb(1)}} = \frac{120}{j120} = -j \cdot 1 \quad \text{А}.$$

Комплексна напруга $\dot{U}_{cd(1)}$ на частоті ω дорівнює:

$$\dot{U}_{cd(1)} = \dot{I}_{2(1)} \cdot j\omega L_2 - \dot{I}_{1(1)} \cdot j\omega L_1 = -j \cdot 1 \cdot j \cdot 85 - j \cdot 1 \cdot j \cdot 15 = 85 + 15 = 100 \quad \text{В};$$

$$P_{(1)} = I_{(1)}^2 \cdot R = 0$$

3.3. Діє складова частоти $3\omega = 300$ рад/с (третя гармоніка):

$$u_{(3)} = 20\sqrt{2} \sin 300t \quad \text{В}.$$

Через те, що за умовою на частоті 3ω у гілці $L_1 - C_1$ резонанс напруг, то повний опір гілки $L_1 - C_1$ для третьої гармоніки $\underline{Z}_{acb(3)} = 0$, (активного опору гілка не має). Тоді повний опір паралельного з'єднання для частоти 3ω також дорівнює нулю:

$$\underline{Z}_{ab(3)} = \frac{\underline{Z}_{acb(3)} \cdot \underline{Z}_{adb(3)}}{\underline{Z}_{acb(3)} + \underline{Z}_{adb(3)}} = 0.$$

Еквівалентний повний опір кола для третьої гармоніки:

$$\underline{Z}_{e(3)} = R + \underline{Z}_{ab(3)} = R = 10 \quad \text{Ом}.$$

З урахуванням цього матимемо такі струми гілок третьої гармоніки:

$$i_{2(3)} = i_{3(3)} = 0; \quad i_{(3)} = i_{1(3)} = i_{4(3)} = 2\sqrt{2} \sin 300t.$$

Складова напруги на вольтметрі для частоти 3ω визначається тільки спадом напруги на індуктивності L_1 (через індуктивність L_2 струм 3-ї гармоніки не проходить), тобто маємо:

$$U_{cd(3)} = U_{ca(3)} = I_1 \cdot 3\omega L_1 = 2 \cdot 300 \cdot 0.15 = 90 \text{ В.}$$

Активна потужність кола на частоті 3ω :

$$P_{(3)} = I_{(3)}^2 R = 2^2 \cdot 10 = 40 \text{ Вт.}$$

4. Визначаємо активну потужність кола і показ вольтметра при дії всіх складових вхідної напруги:

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(3)} = 250 + 40 = 290 \text{ Вт.}$$

Показ вольтметра електромагнітної системи знаходимо за діючими значеннями складових напруги між точками c і d :

$$U_v = \sqrt{U_{cd(0)}^2 + U_{cd(1)}^2 + U_{cd(3)}^2},$$

$$U_v = \sqrt{100^2 + 90^2} \cong 134.54 \text{ В.}$$

11. ВИЩІ ГАРМОНІКИ В ТРИФАЗНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

Несинусоїдні періодичні ЕРС окремих фаз трифазного генератора, як правило, однакові за формою, не містять постійної складової і зсунуті у часі на третину періоду.

Якщо $e_A = e_A(t)$, то $e_B = e_A(t - \frac{T}{3})$, $e_C = e_A(t + \frac{T}{3})$, де T – період.

Враховуючи, що $k \frac{\omega T}{3} = k \frac{2\pi}{3} = k \cdot 120^\circ$, розглянемо гармоніку з номером k ЕРС кожної із фаз :

$$e_{Ak} = E_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k);$$

$$e_{Bk} = E_{mk} \sin(k\omega t - k \cdot 120^\circ + \psi_k);$$

$$e_{Ck} = E_{mk} \sin(k\omega t + k \cdot 120^\circ + \psi_k).$$

Аналізуючи одержані вирази, робимо висновок: гармоніки з номерами, для яких $k = 1, 4, 7, 10, 13 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи прямої послідовності, гармоніки з номерами, для яких $k = 2, 5, 8, 11, 14 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи зворотної

послідовності, гармоніки з номерами, для яких $k = 3, 6, 9, 12 \dots$, утворюють симетричні трифазні системи нульової послідовності.

Розглянемо особливості симетричних трифазних кіл відносно вищих гармонік.

11.1. З'єднання трифазного генератора трикутником

Через кожну фазу генератора (рис. 17) за відсутності навантаження проходить струм, викликаний гармоніками нульової послідовності:

$$I_k = \frac{3E_k}{3Z_{(k)}} = \frac{E_k}{Z_{(k)}}, \text{ де } k = 3, 6, 9, 12 \dots,$$

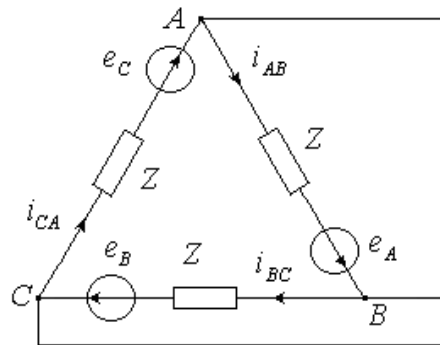


Рис. 17

Струми всіх інших гармонік не проходять, тому що сумарна ЕРС цих гармонік у контурі трикутника дорівнює нулю.

Діюче значення фазного струму генератора за відсутності навантаження:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$$

У разі симетричного навантаження діюче значення фазного струму генератора:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + I_5^2 + \dots}$$

Гармоніки кратні 3-м, що утворюють нульову послідовність, у лінійних напругах відсутні, тому що ЕРС цих гармонік компенсуються напругами на внутрішніх опорах.

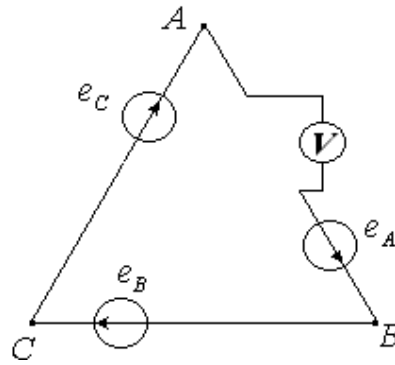


Рис. 18

$$\dot{U}_{AB(k)} = -\dot{E}_k + \dot{I}_{AB(k)} \underline{Z}_{(k)} = -\dot{E}_k + \frac{\dot{E}_k}{\underline{Z}_{(k)}} \underline{Z}_{(k)} = 0.$$

Лінійні струми у зовнішньому колі:

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + I_5^2 + \dots}, \text{ отже } I_{\text{л}} < \sqrt{3} I_{\phi}.$$

Вольтметр, увімкнений так, як показано на рис. 18, вимірює напругу гармонік нульової послідовності чергування фаз:

$$U_V = 3 \sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}.$$

11.2. З'єднання трифазного генератора зіркою

Припустимо, що фазна напруга генератора (рис. 19) містить всі гармоніки, починаючи з першої. Тоді в лінійній напрузі генератора відсутні гармоніки, які утворюють нульову послідовність чергування фаз, тобто кратні трьом.

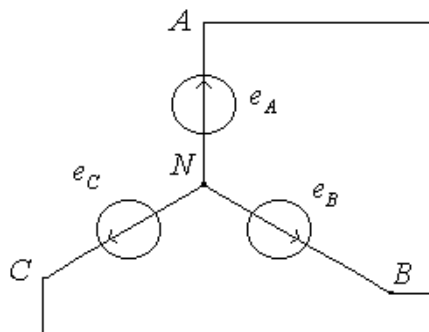


Рис. 19

Діюче значення фазної напруги:

$$U_{\Phi} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + \dots}$$

Діюче значення лінійної напруги:

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + U_5^2 + \dots}, \quad U_{\text{л}} < \sqrt{3}U_{\Phi}.$$

а) Якщо навантаження з'єднане зіркою без нейтрального проводу (рис. 20), то напруга зміщення нейтралі визначається гармоніками нульової послідовності (кратними трьом):

$$U_{N'N} = \sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}$$

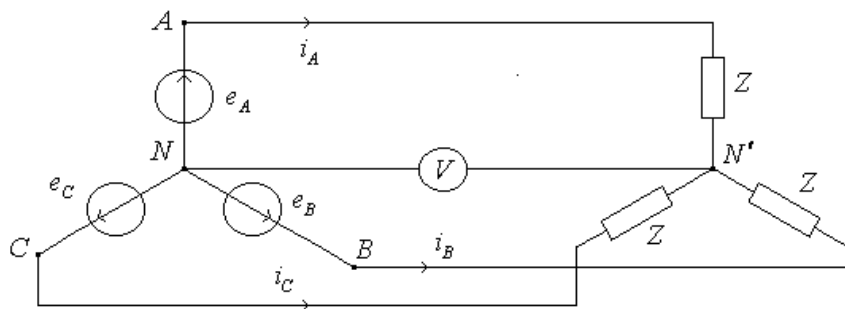


Рис. 20

Фазні (вони ж лінійні) струми не містять гармонік, кратних трьом:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + I_5^2 + \dots}$$

б) Розглянемо тепер симетричне навантаження, з'єднане зіркою з нейтральним проводом (рис. 21).

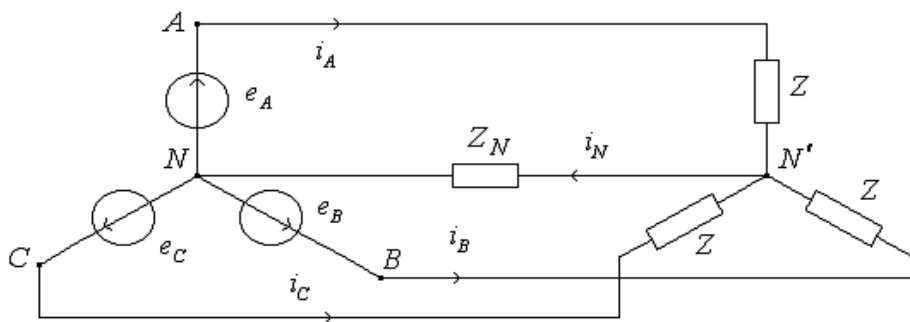


Рис. 21

Напруга зміщення нейтралі для гармонік, що утворюють нульову послідовність (з номерами $3k$, де $k = 1, 2, 3, \dots$):

$$\dot{U}_{N'N(3k)} = \frac{3\dot{E}_{3k} \frac{1}{Z_{(3k)}}}{3 \frac{1}{Z_{(3k)}} + \frac{1}{Z_{N(3k)}}} = \frac{3\dot{E}_{3k}}{3 + \frac{Z_{(3k)}}{Z_{N(3k)}}} = \frac{3\dot{E}_{3k} Z_{N(3k)}}{3Z_{N(3k)} + Z_{(3k)}}. \quad (40)$$

Струм у нейтральному проводі містить гармоніки кратні трьом:

$$\dot{I}_{N(3k)} = \frac{\dot{U}_{N'N(3k)}}{Z_{N(3k)}} = \frac{3\dot{E}_{3k}}{3Z_{N(3k)} + Z_{(3k)}}.$$

Фазні (вони ж лінійні струми) містять всі гармоніки:

$$I_{\Phi} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}$$

Струм у нейтральному проводі: $I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}$

Зазвичай крива ЕРС трифазного генератора симетрична відносно осі абсцис, тому в ній відсутні постійна складова і парні гармоніки.

ПРИКЛАД 11.

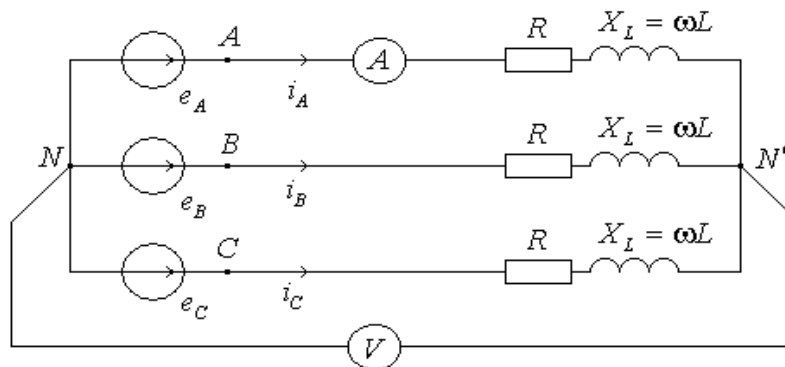


Рис. 22

У колі (рис. 22) відомі:

– фазна ЕРС генератора

$$e_A = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t + 80\sqrt{2} \sin(5\omega t + 45^\circ) \quad \text{В};$$

– параметри симетричного навантаження

$$R = 7.07 \text{ Ом}, \quad X_L = R = 7.07 \text{ Ом}.$$

Визначити покази приладів.

Фазні струми першої та п'ятої гармонік:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{R + j\omega L} = \frac{120}{\underbrace{7.071 + j7.071}_{10\angle 45^\circ}} = 12\angle -45^\circ \text{ A},$$

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{R + 5j\omega L} = \frac{80\angle 45^\circ}{\underbrace{7.071 + j35.355}_{36.055\angle 78.69^\circ}} = 2.22\angle -33.69^\circ \text{ A},$$

$$\dot{U}_{N'N(3)} = 60 \text{ В.}$$

Струм амперметра $I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{12^2 + 2.22^2} = 12.2 \text{ А.}$

Вольтметр покаже напругу третьої гармоніки: $U_V = U_{N'N(3)} = 60 \text{ В.}$

ПРИКЛАД 12.

Визначити покази приладів у колі (рис. 23) за умови, що параметри генератора і навантаження такі ж, як і у попередньому прикладі.

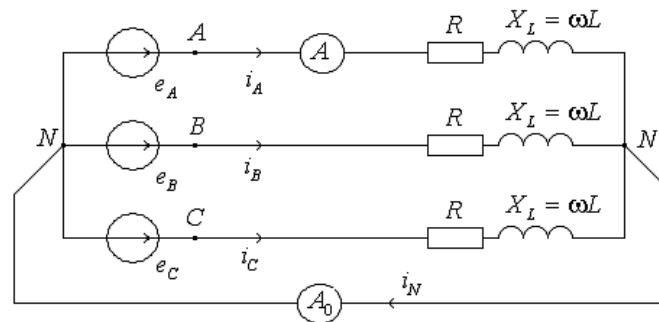


Рис. 23

Фазні струми першої, третьої і п'ятої гармонік:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{120}{\underbrace{7.071 + j7.071}_{10\angle 45^\circ}} = 12e^{-j45^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{A(3)} = \frac{\dot{E}_{A(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{60}{7.071 + j7.071 \cdot 3} = \frac{60}{\underbrace{7.071 + j21.213}_{22.36\angle 71.565^\circ}} = 2.68e^{-j71.565^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{80\angle 45^\circ}{\underbrace{7.071 + j35.355}_{36.055\angle 78.69^\circ}} = 2.22e^{-j33.69^\circ} \text{ A}.$$

Струми амперметрів:

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2 + I_{A(5)}^2} = \sqrt{12^2 + 2.68^2 + 2.22^2} = 12.49 \text{ A},$$

$$I_{A(0)} = 3I_{3(0)} = 3 \cdot 2.68 = 8.04 \text{ A}.$$

У нейтральному проводі буде тільки струм третьої гармоніки (нульової послідовності).

ПРИКЛАД 13.

ЕРС фази *A* симетричного трифазного генератора подана тригонометричним рядом:

$$e_A = 120\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin(3\omega t + 45^\circ) + 30\sqrt{2} \sin(5\omega t - 90^\circ).$$

Схема з'єднання генератора і споживача приведена на рис. 24. Параметри споживача на частоті ω становлять $R = 20 \text{ Ом}$, $1/\omega C = 30 \text{ Ом}$; опір нейтралі $X_{N(1)} = \omega L_N = 2 \text{ Ом}$. Визначити покази приладів електромагнітної системи та миттєві значення струмів i_C, i_N .

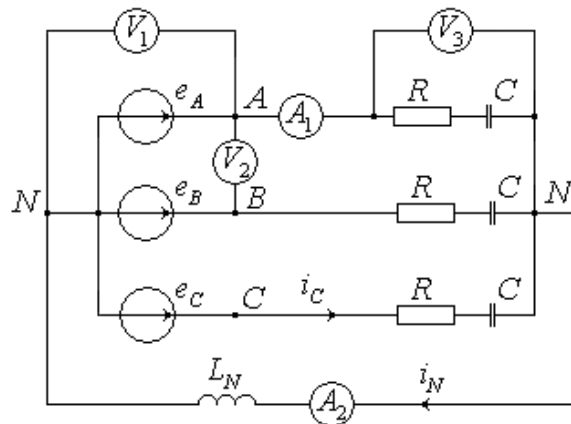


Рис. 24

Для прямої та зворотної послідовності фаз у симетричному режимі напруга зміщення нейтралі дорівнює нулю:

$$U_{N^*N(1)} = U_{N^*N(5)} = 0.$$

Тоді комплексні струми фази *A* для 1-ї та 5-ї гармонік становлять:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{\dot{E}_{A1}}{R - j/\omega C} = \frac{120}{20 - j30} = 3.33e^{j56.3^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{A(5)} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{\underline{Z}_{(5)}} = \frac{\dot{E}_{A(5)}}{R - j/5\omega C} = \frac{30e^{-j90^\circ}}{20 - j6} = 1.44e^{-j73.3^\circ} \text{ А}.$$

У відповідності з формулою (40) напруга зміщення нейтралі для 3-ї гармоніки дорівнює:

$$\dot{U}_{N^*N(3)} = \frac{3\dot{E}_{A3} \cdot \underline{Z}_{N(3)}}{3\underline{Z}_{N(3)} + \underline{Z}_{(3)}} = \frac{3 \cdot 60e^{j45^\circ} \cdot 6e^{j90^\circ}}{j18 + 20 - j10} = 50.16e^{j113.2^\circ} \text{ В}.$$

Комплекс струму нейтрального проводу 3-ї гармоніки:

$$\dot{I}_{N(3)} = \frac{\dot{U}_{N^*N(3)}}{\underline{Z}_{N(3)}} = \frac{50.16e^{j113.2^\circ}}{6e^{j90^\circ}} = 8.36e^{j23.2^\circ} \text{ А}.$$

Комплексні струми фаз 3-ї гармоніки:

$$\dot{I}_{\Phi(3)} = \dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{B(3)} = \dot{I}_{C(3)} = \frac{1}{3} \dot{I}_{N(3)} \cong 2.79e^{j23.2^\circ} \text{ А}.$$

Фазна напруга споживача від струму 3-ї гармоніки:

$$\dot{U}_{\Phi(3)} = \dot{I}_{\Phi(3)} \cdot Z_{\Phi(3)} = 2.79\sqrt{20^2 + 10^2} \cong 62.40 \text{ В}.$$

Складові фазних напруг 1-ї та 5-ї гармонік дорівнюють відповідним складовим фазної ЕРС генератора:

$$U_{\Phi(1)} = E_{(1)} = 120 \text{ В}, \quad U_{\Phi(5)} = E_{(5)} = 30 \text{ В}.$$

Покази вольтметрів V_1 та V_3 :

$$U_{V_1} = \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(3)}^2 + E_{(5)}^2} = \sqrt{120^2 + 60^2 + 30^2} = 137.48 \text{ В},$$

$$U_{V_3} = \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + U_{\Phi(5)}^2} = \sqrt{120^2 + 62.4^2 + 30^2} = 138.54 \text{ В}.$$

Показ вольтметра V_2 :

$$U_{V_2} = \sqrt{3} \sqrt{E_{(1)}^2 + E_{(5)}^2} = 214.24 \text{ В}.$$

Враховуючи знайдені раніше комплексні складові 1-ї, 3-ї та 5-ї гармонік струму фази A , для миттєвого значення струму фази C матимемо:

$$i_C = 3.33\sqrt{2} \sin(\omega t + 176.3^\circ) + 2.79\sqrt{2} \sin(3\omega t + 23.2^\circ) + 1.44\sqrt{2} \sin(5\omega t - 193.3^\circ) \quad \text{А.}$$

У виразі для i_C враховано, що струми 3-ї гармоніки створюють нульову послідовність і мають однакові початкові фази ($\psi_{i_{A(3)}} = \psi_{i_{C(3)}}$), а струми 5-ї гармоніки створюють зворотну послідовність ($\psi_{i_{C(5)}} = \psi_{i_{A(5)}} - 120^\circ$).

ПРИКЛАД 14.

Вважаючи схему, яка зображена на рис. 12, однією із фаз симетричного трифазного кола і прийнявши в якості фазної ЕРС криву, приведену на рис.13, необхідно:

- записати вирази миттєвих значень ЕРС у всіх фазах трифазного генератора;
- визначити діючі значення лінійної напруги генератора і струму в нейтральному проводі;
- визначити діюче значення напруги між нейтральними точками генератора і споживача та діючі значення струмів в лінійних проводах при розриві нейтрального проводу.

Схема кола в трифазному варіанті, зображена на рис.25.

Нехай крива $e(\omega t)$, приведена на рис. 13, являє собою ЕРС фази А трифазного генератора. Тоді миттєве значення ЕРС фази А запишеться у вигляді розв'язку (20*) (приклад 5):

$$e_A = 153 \sin(\omega t + \pi/6) + 51 \sin(3\omega t + \pi/2) + 30,6 \sin(5\omega t + 5\pi/6) + \dots$$

Для ЕРС фаз В і С відповідно матимемо:

$$e_B = 153 \sin(\omega t - \pi/2) + 51 \sin(3\omega t + \pi/2) + 30,6 \sin(5\omega t + 3\pi/2) + \dots,$$

$$e_C = 153 \sin(\omega t + 5\pi/6) + 51 \sin(3\omega t + \pi/2) + 30,6 \sin(5\omega t + \pi/6) + \dots$$

Діюче значення лінійної напруги генератора (показ вольтметра V1):

$$U_L \approx \sqrt{3} \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(5)}^2} = \sqrt{3} \sqrt{108^2 + 21,6^2} = 191 \quad \text{В.}$$

Діюче значення струму в нейтральному проводі (показ амперметра А2 при замкненому ключі К):

$$I_N \approx 3\sqrt{I_{1(3)}^2} = 3\sqrt{0,923^2} = 2,77 \text{ А.}$$

Діюче значення напруги між нейтральними точками генератора O і споживача O_1 при розмиканні ключа K (показ вольтметра V2):

$$U_N \approx U_{(3)} = 36,1 \text{ В.}$$

Діючі значення струмів в лінійних проводах при розриві нейтрального проводу (показ амперметра А1 при розмиканні ключа К):

$$I_{A1} \approx \sqrt{I_{1(1)}^2 + I_{1(5)}^2} = \sqrt{1,11^2 + 0,574^2} = 1,25 \text{ А.}$$

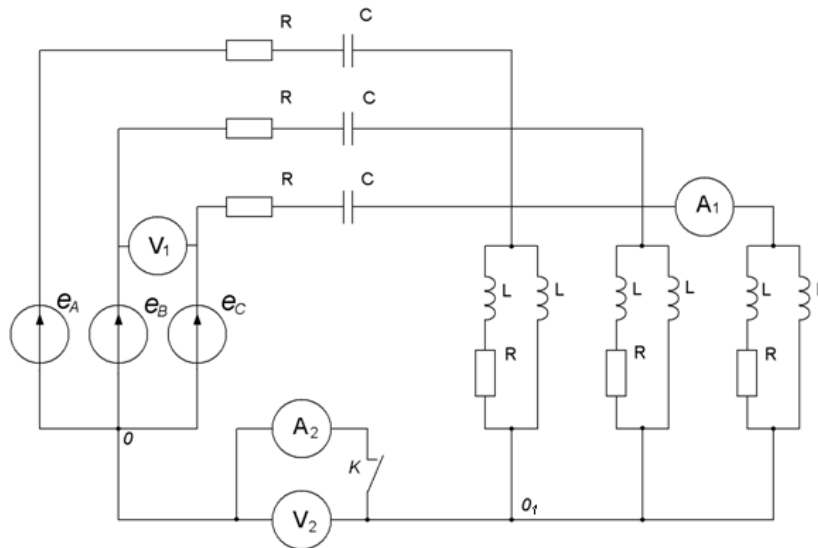


Рис. 25

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які струми та напруги називають періодичними?
2. Які причини виникнення несинусоїдних струмів та напруг?
3. Яким умовам повинна задовольняти періодична функція для подання її рядом Фур'є?
4. Які види симетрії можуть мати періодичні криві струмів та напруг?
5. Як впливають різні види симетрії на гармонічний склад періодичних несинусоїдних струмів та напруг?
6. Як виконується розрахунок лінійного кола з несинусоїдними джерелами енергії? Вкажіть послідовність розрахунку.
7. Як розраховується діюче значення періодичного струму?
8. Дайте визначення поняттям: активна, реактивна, повна потужності у колі несинусоїдного струму.
9. Як розрахувати активну, реактивну та повну потужності у колі несинусоїдного струму?
10. На яких елементах електричного кола форми несинусоїдних кривих струму і напруги подібні?
11. Як змінює індуктивність форму кривої напруги порівняно з формою кривої несинусоїдного струму? Чому це відбувається?
12. Як змінюється форма кривої струму в ємності порівняно з кривою несинусоїдної напруги? Чому?
13. Які особливості мають резонансні явища у колах несинусоїдного струму?
14. До яких негативних наслідків може привести вмикання конденсаторів в електромережу живлення споживачів несинусоїдного струму?
15. Які умови виникнення резонансу напруг та резонансу струмів в електричному колі?

16. Гармоніки з якими номерами утворюють симетричні трифазні системи прямої, нульової і зворотної послідовності в симетричній трифазній системі з несинусоїдними ЕРС?
17. Як проходять струми гармонік нульової послідовності в трифазному симетричному колі?
18. Які відмінності в співвідношеннях між лінійними і фазними напругами симетричної трифазної системи за наявності вищих гармонік і за їх відсутності?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

В електричному колі, схеми якого зображені на рис. 26, діє джерело періодичної несиносоїдної ЕРС. Часові графіки ЕРС зображені кривими рис. 27, нелінійні відрізки кривих являють собою частини синусоїди. Кутова частота зміни ЕРС $\omega=1000 \text{ рад/с}$.

НЕОБХІДНО:

1. Виконати розкладання несиносоїдної ЕРС в ряд Фур'є (обмежитись 1-ою, 3-ою і 5-ою гармоніками).
2. Побудувати в одній системі координат часові графіки складових і результуючу криву ЕРС, останню порівняти із графіком ЕРС, приведеної в умові завдання.
3. Розрахувати миттєві значення струмів у всіх гілках досліджуваної схеми.
4. Визначити покази амперметрів електромагнітної системи, що знаходяться у гілках схеми.
5. Визначити потужності P , Q , S , T і коефіцієнт потужності джерела ЕРС. Скласти баланс активних потужностей кола.
6. Записати умову резонансу кола для k -ої гармоніки. Визначити величину ємності C чи індуктивності L гілки з джерелом e із умови резонансу усього кола для 3-ої гармоніки. Розрахувати вхідний опір кола для цієї гармоніки при резонансі.
7. Вважаючи задану схему однією із фаз симетричного трифазного кола при з'єднанні генератора і споживача зіркою з нейтральним проводом, необхідно:
 - записати вирази миттєвих ЕРС для всіх фаз трифазного генератора (взяти вказану в умові ЕРС в якості ЕРС фази A);
 - визначити діючі значення лінійної напруги генератора і струму в нейтральному проводі;

- розрахувати діюче значення напруги між нейтральними точками генератора і споживача та діюче значення струмів в лінійних проводах при розриві нейтрального проводу.

Параметри електричного кола і характеристика ЕРС приведені в табл.2.

Таблиця 2.

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
E_m, B	80	90	100	110	120	130	50	70	85	95
$R, Ом$	20	25	30	35	40	45	15	20	25	30
$L, мГн$	4	6	8	10	12	14	4	6	8	10
$C, мкФ$	14	12	10	8	7	6	16	14	16	18

Вказівка. Вихідні дані для завдання вибрати згідно з тризначним шифром, який видає студенту викладач. Перша цифра шифру відповідає номеру колонки із табл. 2, друга – номеру кривої ЕРС (рис. 25), третя, остання цифра шифру визначає номер схеми (рис. 26).

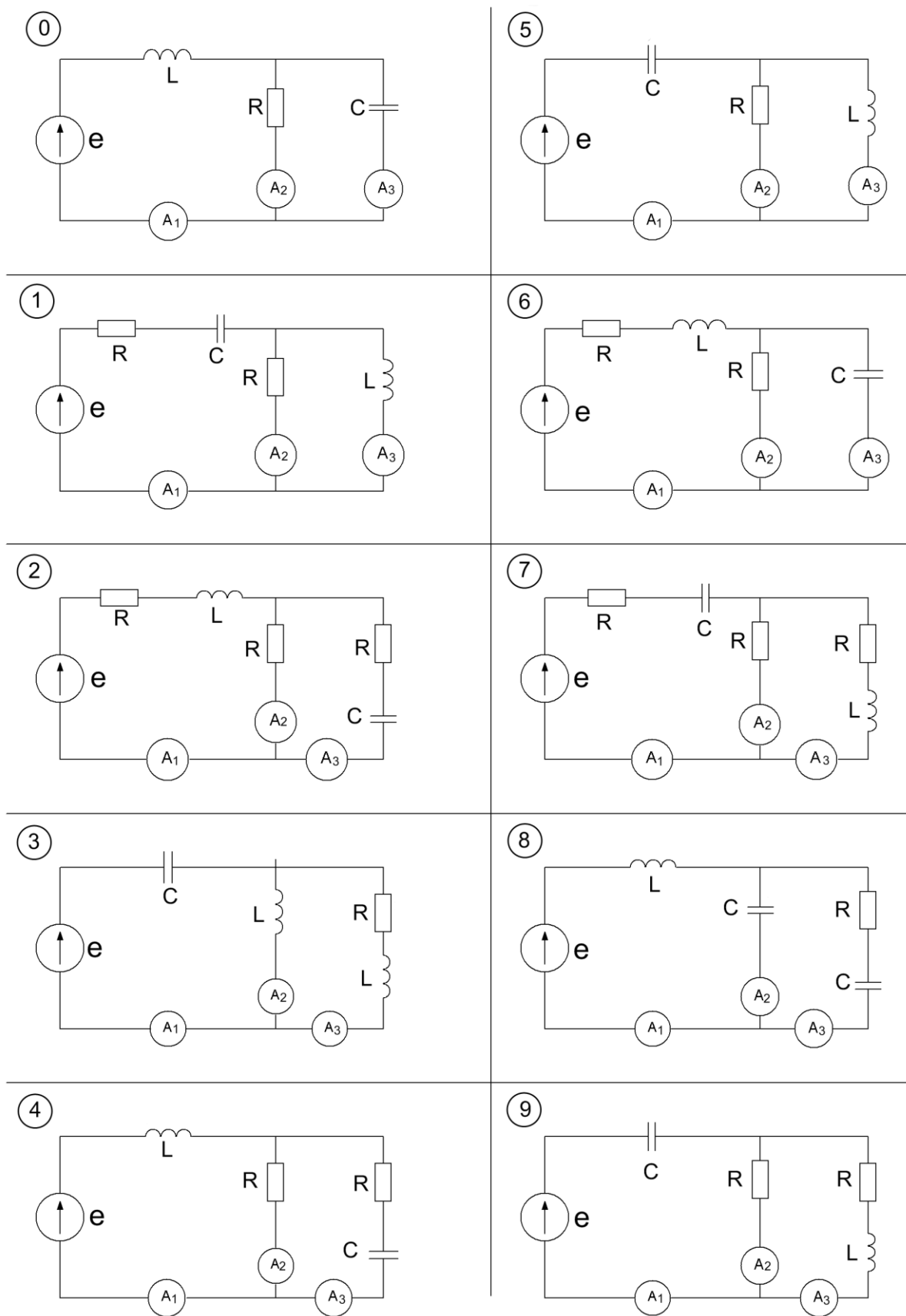


Рис.26

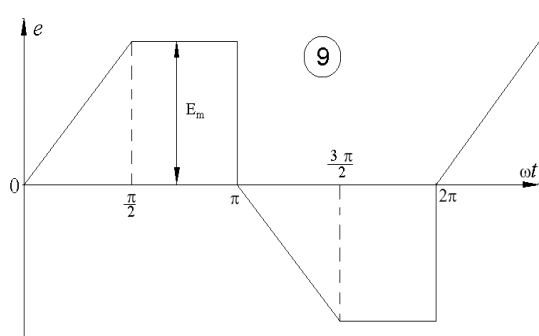
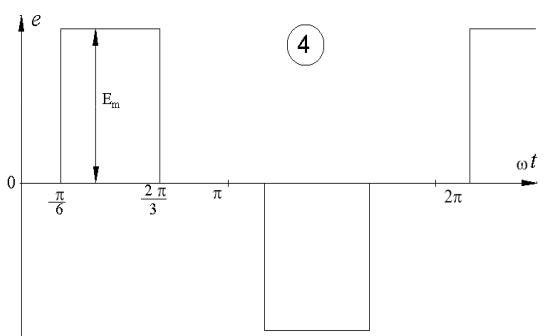
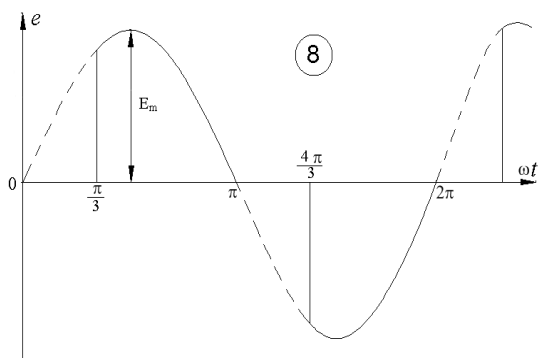
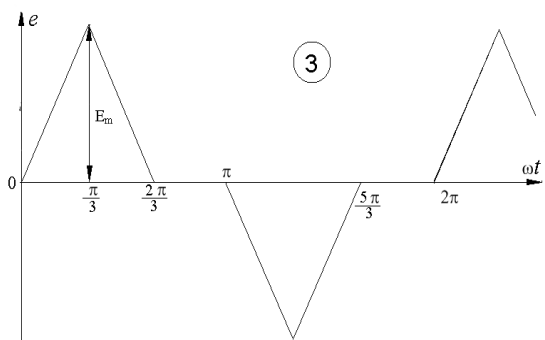
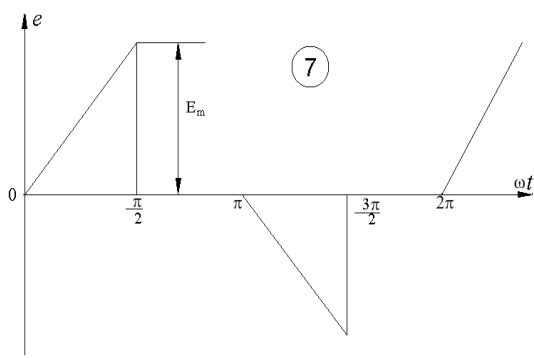
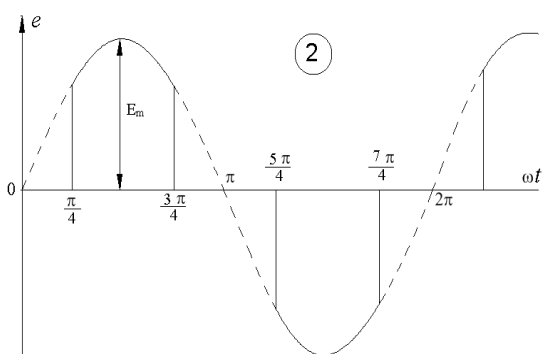
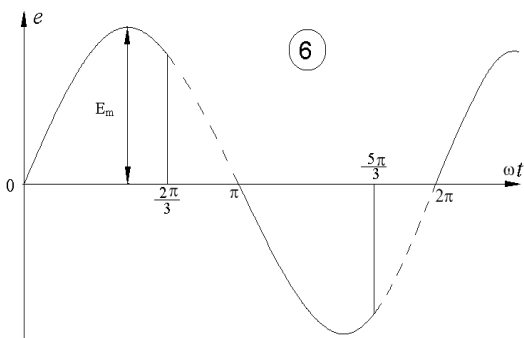
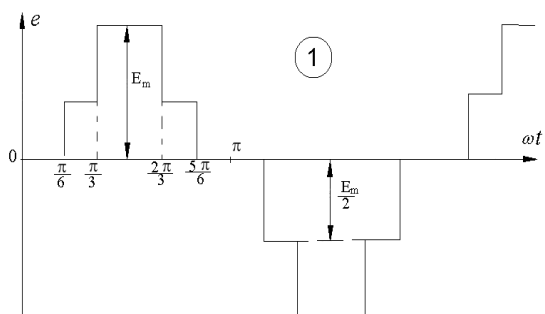
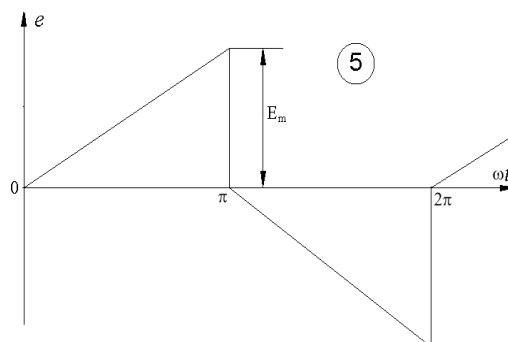
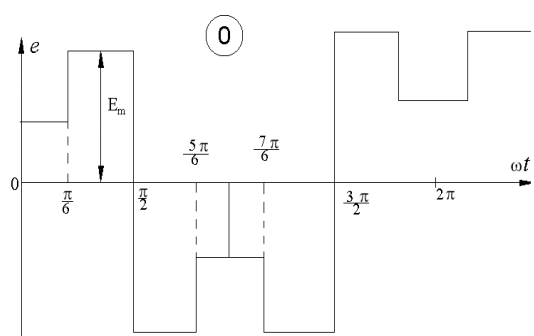


Рис.27

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бойко В. С. Теоретичні основи електротехніки [Текст]: в 3 т.: підруч. для студ. техн. спец. вищих закл. осв. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб [та ін.] – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2004.
Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272 с., : іл. – Бібліогр.: с. 263-264. – 2000 прим.
2. К. С. Демирчян. Теоретические основы электротехники [Текст]: в 3 т.:учеб. для студ. электротехн. и электроэнергет. спец. вузов / Л. Р. Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чечурин. – 4-е изд., дополн. для самост. изуч. курса – СПб.: Питер, 2003 (в пер.). ISBN: 5-94723-620-6.
Т.1 – 445 с., : ил. – Алфав. указ.: с. 438-445.
3. Перхач В. С. Теоретична електротехніка [Текст]: підруч. для студ. електроенергет. спец. ВНЗ / В. С. Перхач –К.: Вища шк., 1992. – 440 с.: іл. – Бібліогр.: с. 435. – Предм. покажчик: с.436-439. – ISBN 5-11-003873-2 (в пер.).
4. Зевеке Г.В. Основы теории цепей [Текст]: учеб. для студ. электротехн. и электроэнергет. спец. вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил [и др.]. – 5-е изд. перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил. – Библиогр.: с. 513. – Предм. указ.: с. 519-522. – 50000 экз. – ISBN 5-283-00523-2 (в пер.).
5. Антамонов В .Х. Избранные задачи по линейным электрическим цепям [Текст]: учебн. пособие. / В. Х. Антамонов, И.А. Курило. – К.: НМК ВО. 1993. — 96 с.: – Библиогр.: с. 94. – 1500 экз. – ISBN 5-7763-1556-5.