

РОЗДІЛ 2. РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У КОЛАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1. Основні теоретичні положення

Причини виникнення перехідних процесів в електричних колах з розподіленими параметрами в основному такі ж, як і в колах із зосередженими параметрами. Це – різноманітні комутації, тобто вмикання, вимикання окремих ділянок, дія джерел неперіодичних напруг та струмів при передачі інформаційних сигналів, наприклад, телеграфних, телефонних тощо. Додатковою причиною виникнення перехідних процесів у довгих лініях передачі є дія грозових розрядів, тобто швидка зміна зовнішніх електричних та магнітних полів, в яких знаходиться лінія.

Для розрахунку перехідних процесів необхідно знайти розв'язок диференціальних рівнянь лінії за даних граничних та початкових умов. Розрахунок суттєво спрощується, якщо розглядати лінію без втрат, тобто приймати, що $R_0 = 0, G_0 = 0$. Таке припущення дозволяє одержати найбільш наочну, фізично чітку картину перехідних процесів, яку за необхідності можна уточнити, враховуючи вплив втрат.

Запишемо телеграфні рівняння безвтратної лінії:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де x — координата, яка відраховується від початку лінії.

Використаємо операторний метод для розв'язання рівнянь (2.1). Виконаємо пряме перетворення Лапласа за часовою координатою t для

кожного з цих рівнянь, вводячи у розгляд операторні зображення напруги та струму:

$$\begin{aligned} u(t, x) &\stackrel{\cdot}{=} U(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-pt} dt; \\ i(t, x) &\stackrel{\cdot}{=} I(p, x) = \int_0^{\infty} i(t, x) e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ці зображення є функціями оператора p та координати x . За теоремою диференціювання оригіналу рівняння (2.1) в операторній формі запишуться так:

$$\begin{aligned} -\frac{dU(p, x)}{dx} &= pL_0 I(p, x) - L_0 i(0, x); \\ -\frac{dI(p, x)}{dx} &= pC_0 U(p, x) - C_0 u(0, x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

У рівняння (2.3) входять початкові значення напруги $u(0, x)$ та струму $i(0, x)$ у лінії.

Суттєво зазначити, що (2.3) для операторних зображень $U(p, x)$ та $I(p, x)$ є звичайними диференціальними рівняннями, тому що за змінною p диференціювання не виконується.

Особливо просто виглядають рівняння (2.3) за нульових початкових умов, тобто якщо $u(0, x) = 0$ та $i(0, x) = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{dU(p, x)}{dx} &= pL_0 I(p, x); \\ -\frac{dI(p, x)}{dx} &= pC_0 U(p, x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Диференціюючи за x , запишемо (2.4) у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} &= \frac{p^2}{v^2}U(p,x); \\ \frac{d^2I(p,x)}{dx^2} &= \frac{p^2}{v^2}I(p,x),\end{aligned}\tag{2.5}$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$.

Розв'язок рівнянь у частинних похідних зведено до розв'язку більш простої задачі – інтегрування звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Загальний інтеграл рівняння (2.5):

$$U(p,x) = A(p)e^{-p\frac{x}{v}} + B(p)e^{p\frac{x}{v}},\tag{2.6}$$

де $A(p)$ та $B(p)$ – деякі довільні функції комплексної змінної p , які визначаються граничними умовами.

Для операторного зображення струму дістанемо

$$\begin{aligned}I(p,x) &= -\frac{1}{pL_0} \frac{d}{dx} \left[A(p)e^{-p\frac{x}{v}} + B(p)e^{p\frac{x}{v}} \right] = \\ &= -\frac{1}{pL_0} \left[-\frac{p}{v} A(p)e^{-p\frac{x}{v}} + \frac{p}{v} B(p)e^{p\frac{x}{v}} \right].\end{aligned}$$

Позначимо $L_0v = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C$.

Отже,

$$I(p,x) = \frac{1}{Z_C} \left[A(p)e^{-p\frac{x}{v}} - B(p)e^{p\frac{x}{v}} \right].\tag{2.7}$$

Прийmemo, що $\varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} A(p)$; $\psi(t) = B(p)$.

Згідно з теоремою запізнення оригінали, що відповідають зображенням (2.6) і (2.7), запишемо у вигляді:

$$u(t, x) = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{v}\right) = u_{\varphi} + u_{\psi}; \quad (2.8)$$

$$i(t, x) = \frac{1}{Z_C} \left[\varphi\left(t - \frac{x}{v}\right) - \psi\left(t + \frac{x}{v}\right) \right] = i_{\varphi} + i_{\psi}. \quad (2.9)$$

Конкретний вигляд функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ залежить від граничних умов на кінцях лінії, де вмикаються джерела та споживачі електричної енергії.

Проаналізуємо здобуті вирази для напруги та струму лінії. Розглянемо спочатку складову напруги $u_{\varphi} = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Визначимо, як з часом повинна змінюватись координата x точки, в якій функція φ має фіксоване значення. Для того, щоб функція зберігала постійне значення, потрібно, щоб аргумент її залишався незмінним, тобто $\frac{d}{dt}\left(t - \frac{x}{v}\right) = 0$, звідки

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad x = x_0 + v(t - t_0).$$

Отже, напруга u_{φ} у будь-якій точці, яка рухається вздовж лінії із швидкістю v , не залежить від часу. Це означає, що будь-який початковий розподіл напруги $u_{\varphi}(t_0, x)$ рухається вздовж лінії із швидкістю v у напрямку зростання координати x (рис. 2.1).

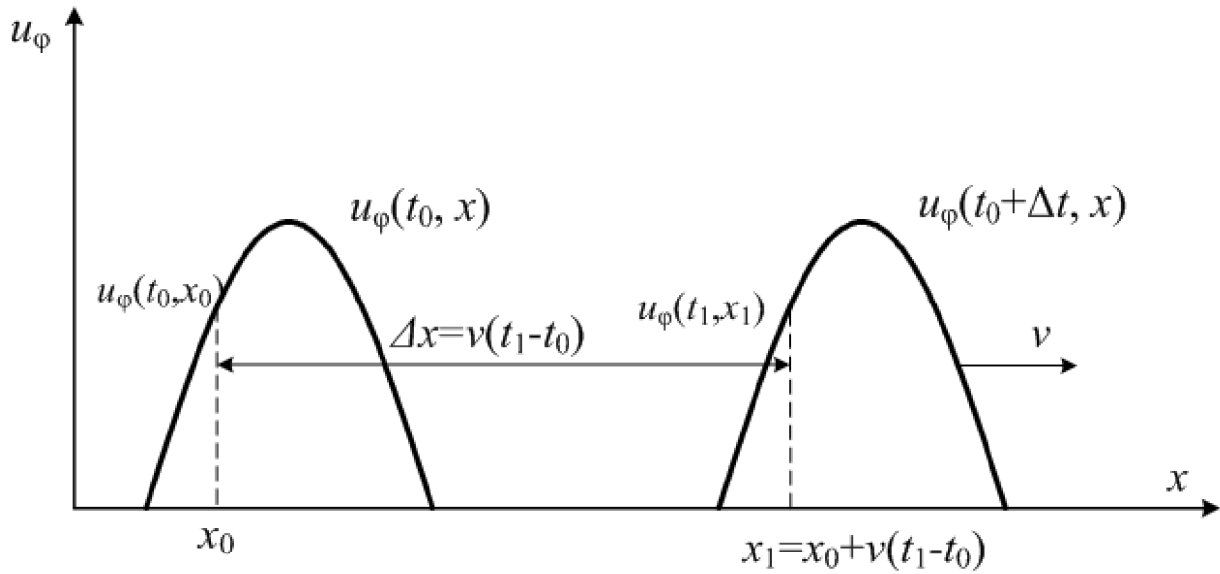


Рис. 2.1

Інакше кажучи, функція $u_\varphi = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)$ є прямою хвилею напруги, яка поширюється вздовж лінії від її початку до кінця без загасання і зміни форми. За яким би законом не змінювалась напруга прямої хвилі в деякій точці лінії з координатою $x = x_0$, за таким же законом буде змінюватись вона і в будь-якій іншій точці, для якої $x = x_1 > x_0$, але з запізненням на час, потрібний хвилі, щоб пробігти відстань $x_1 - x_0$.

Аналогічно функція $u_\psi = \psi\left(t + \frac{x}{v}\right)$ визначає собою зворотню хвилю напруги, яка поширюється із швидкістю v уздовж лінії без згасання і зміни форми, але у напрямку зменшення координати x , тобто назад, від кінця лінії до її початку.

Отже, за відсутності втрат у лінії напруга і струм в ній можуть розглядатись як результат накладання двох хвиль, що поширюються

вздовж лінії без загасання і зміни форми із швидкістю $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ у

протилежних напрямках. Для прямої і зворотної хвиль зв'язок між напругою і струмом визначається співвідношеннями, які можна назвати законом Ома для хвилі:

$$i_\phi = \frac{u_\phi}{Z_c}; \quad i_\psi = \frac{u_\psi}{Z_c}. \quad (2.10)$$

Швидкість поширення хвиль $v = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$ для повітряних ліній

дорівнює швидкості світла в повітрі, для кабельних ліній вона в 1,5–2,5 разів менша.

За допомогою рівнянь (2.10) покажемо, що енергія магнітного поля хвилі дорівнює енергії її електричного поля. Справді, для енергії магнітного поля прямої хвилі, віднесеної до одиниці довжини лінії, будемо мати

$$W_{M\phi} = \frac{L_0 i_\phi^2}{2} = \frac{L_0}{2} \left(\frac{u_\phi}{Z_c} \right)^2 = \frac{L_0}{2} \left(\frac{u_\phi}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \right)^2 = \frac{C_0 u_\phi^2}{2} = W_{e\psi}.$$

Аналогічно доводиться, що для зворотної хвилі $W_{M\psi} = W_{e\phi}$.

Прямі та зворотні хвилі виникають не в усіх точках лінії одночасно, а спочатку лише там, де відбувається комутація. Наприклад, під час вмикання ($t = 0$) лінії до джерела напруги хвилі починають поширюватись від початку лінії ($x = 0$) у напрямку до її кінця. Якщо до комутації напруги в лінії не було, то на тій частині лінії, до якої пряма

хвиля ще не дійшла, напруга продовжує дорівнювати нулю. На тій частині лінії, до якої пряма хвиля вже дійшла, напруга дорівнює напрузі лише прямої хвилі. Вона буде залишатись такою до приходу зворотної хвилі. У загальному випадку на тих ділянках лінії, де спостерігаються і прямі, і зворотні хвилі, напруга і струм визначаються накладанням прямих та зворотних хвиль:

$$u = u_{\varphi} + u_{\psi}; \quad (2.11)$$

$$i = i_{\varphi} - i_{\psi}. \quad (2.12)$$

Знак « \rightarrow » у (2.12) означає, що напрям струму i_{ψ} у кожній точці лінії береться протилежним напрямомі струму i_{φ} .

2.2. Методика і приклади розрахунку перехідного процесу при ввімкненні лінії до джерела напруги

2.2.1. Розрахунок напруги та струму прямої хвилі

Нехай джерело напруги $u_0(t)$ вмикається до лінії без втрат через пасивний чотирьополісник Π із зосередженими параметрами (рис. 2.2).

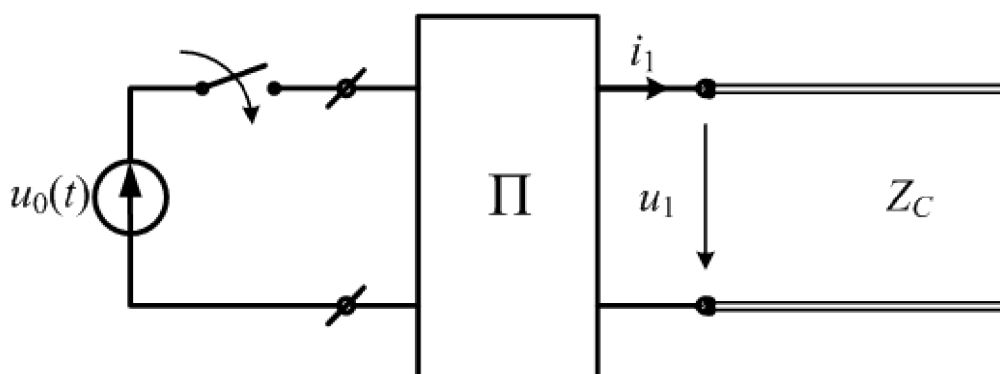


Рис. 2.2

Починаючи з моменту комутації ($t = 0$), на початку лінії з'являється напруга $u_1(t)$, яка згідно з міркуваннями, наведеними раніше, являє собою напругу прямої хвилі. Пряма хвиля починає бігти у напрямку від початку до кінця лінії, зворотна хвиля ще не з'явилась, тому що немає умов для її виникнення.

Для напруги та струму на початку лінії можна записати:

$$u_1(t) = u_\phi(t, 0) = Z_c i_\phi(t, 0) = Z_c i_1(t). \quad (2.13)$$

Співвідношення (2.13) показує, що для визначення напруги та струму на початку лінії можна скористатись еквівалентною схемою, в якій лінія заміщується хвильовим опором (рис. 2.3).

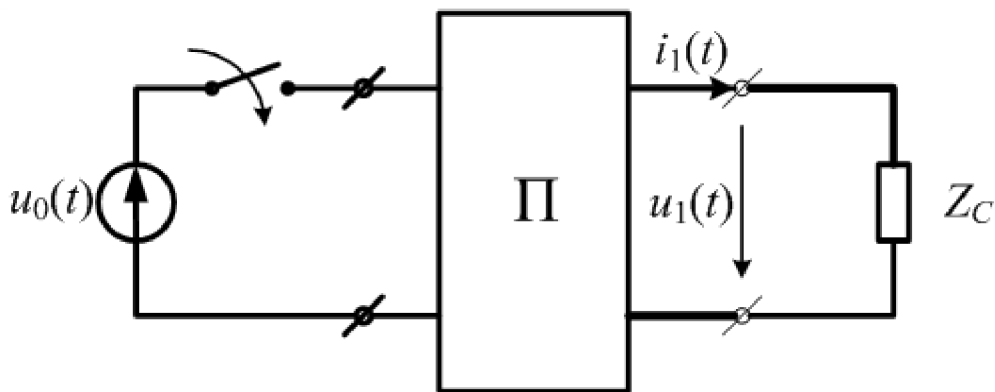


Рис. 2.3

Розрахувавши перехідний процес у схемі на рис. 2.3, дістанемо напругу прямої хвилі на початку лінії як функцію часу:

$$u_\phi(t, 0) = u_1(t). \quad (2.14)$$

Напруга прямої хвилі у будь-якій точці лінії з координатою x повторює напругу прямої хвилі на початку лінії, запізнюючись на час, який потрібен хвилі, щоб пробігти відстань x із швидкістю v .

Отже, рівняння для напруги прямої хвилі як функція часу t та координати x можна здобути, замінивши аргумент t у правій частині

(2.14) на $t - \frac{x}{v}$:

$$u_{\varphi}(t, x) = u_1 \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (2.15)$$

Це рівняння дозволяє розрахувати напругу прямої хвилі в будь-який момент часу $t > 0$ в точках лінії, для яких $x \leq vt$, за відомим рівнянням напруги як функції часу на початку лінії.

Струм прямої хвилі знаходиться за законом Ома:

$$i_{\varphi} = \frac{u_{\varphi}}{Z_c}.$$

Задача 2.1. Повітряна лінія довжиною $l = 120$ км з хвильовим опором $Z_c = 300$ Ом вмикається через RC -ланку до джерела постійної напруги $U_0 = 900$ В (рис. 2.4). Побудувати графік розподілу напруги прямої хвилі вздовж лінії через $t_0 = 0,3$ мс після комутації; $R = 150$ Ом; $C = 2$ мкФ.

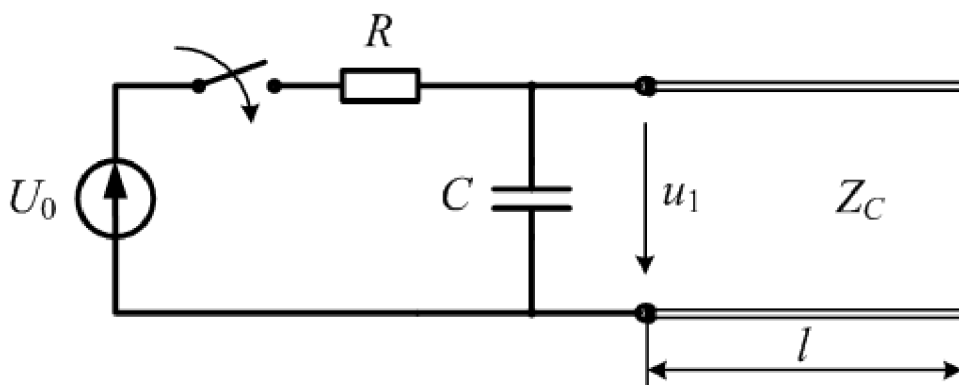


Рис. 2.4

Розв'язання. Напругу $u_1(t)$ на початку лінії знаходимо класичним або операторним методом за еквівалентною схемою (рис. 2.5):

$$u_1(t) = 600(1 - e^{-5000t}).$$

Напруга прямої хвилі

$$u(t, x) = u_\varphi \left(t - \frac{x}{v} \right) = 600 \left[1 - e^{-5000 \left(t - \frac{x}{3 \cdot 10^5} \right)} \right].$$

Тут $v = 3 \cdot 10^5$ км/с, координата x вимірюється в кілометрах.

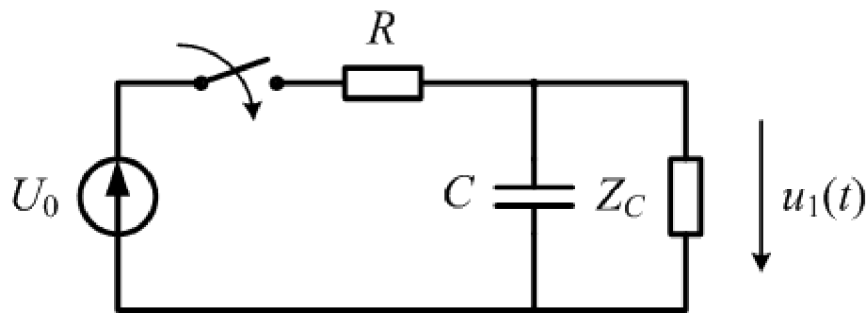


Рис. 2.5

Для побудови графіка розподілу напруги прямої хвилі вздовж лінії використовуємо рівняння

$$u_\varphi(t_0, x) = 600 \left[1 - e^{-5000 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{3 \cdot 10^5} \right)} \right],$$

в якому $t_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ с, а x змінюється від $x = 0$ до $x = vt_0 = 90$ км.

Графік побудовано на рис. 2.6.

Точка лінії з координатою x_φ , для якої виконується умова $u_\varphi = 0$ при $x > x_\varphi$ і $u_\varphi \neq 0$ при $x < x_\varphi$, називається *фронтом прямої хвилі*.

Фронт прямої хвилі рухається у напрямку зростання координати x із швидкістю v .

Порівняємо графік розподілу напруги вздовж лінії залежно від координати x (рис. 2.6) з графіком зміни напруги на початку лінії залежно від часу t (рис. 2.7).

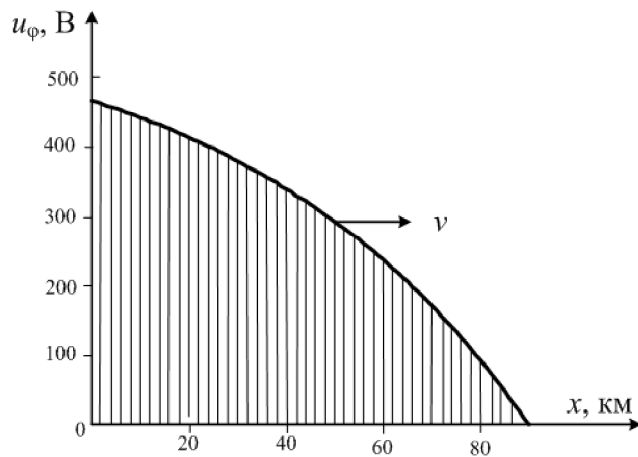


Рис. 2.6

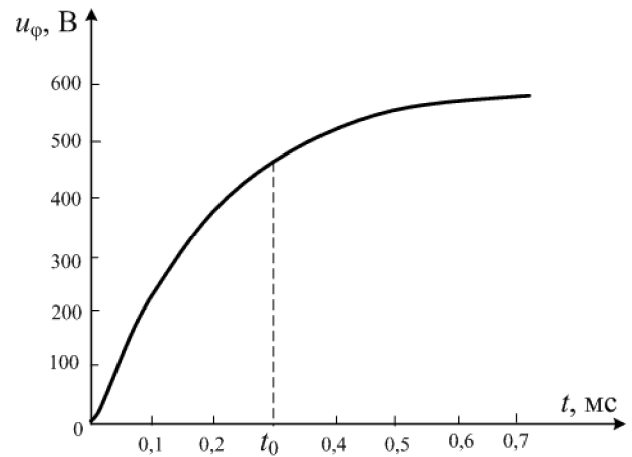


Рис. 2.7

Відмітимо, що графік $u_\phi(t_0, x)$ можна здобути віддзеркаленням графіка $u_\phi(t, 0)$ відносно вертикальної осі, проведеної через точку t_0 , з відповідною зміною масштабу вздовж осі абсцис.

Якщо лінія вмикається безпосередньо до джерела постійної напруги U_0 (рис. 2.8), то напруга на початку лінії до моменту комутації ($t < 0$) дорівнює нулю, а після комутації ($t \geq 0$) дорівнює U_0 (рис. 2.9). Тому напруга прямої хвилі, яка поширюється вздовж лінії, має прямокутну форму (рис. 2.10).

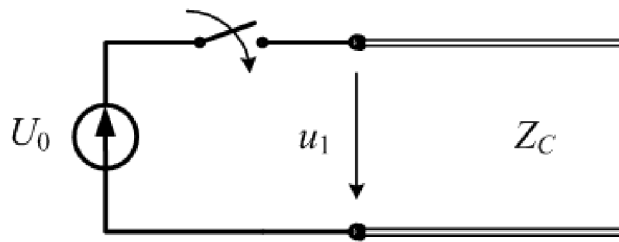


Рис. 2.8

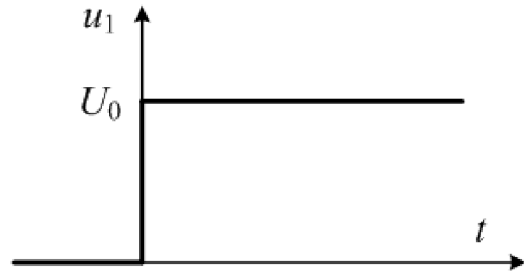


Рис. 2.9

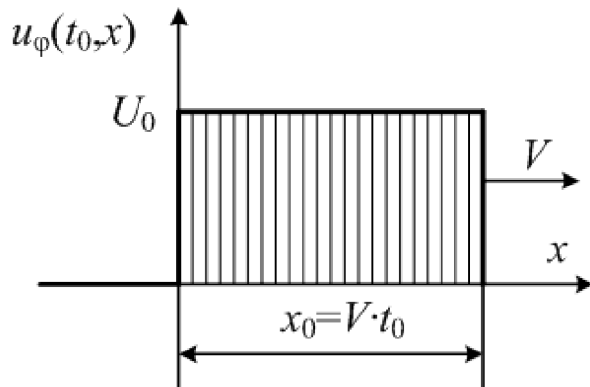


Рис. 2.10

Така хвиля називається *хвилею з прямовисним фронтом* або *прямокутним*. Хвиля з практично прямовисним фронтом виникає також при вмиканні до лінії джерела синусоїдної напруги промислової частоти, тому що за час пробігу хвилею відстані в межах

декількох десятків кілометрів (0,1...0,3) мс напруга джерела не встигає помітно змінитись.

2.2.2. Розрахунок відбитих та заломлених хвиль

Однорідність лінії, по якій рухається пряма хвиля, порушується в тих точках, де в лінію вмикаються елементи із зосередженими параметрами, приєднуються інші лінії з різними хвильовими опорами. Ці точки будемо називати *місцями неоднорідності*. У разі набігання прямої хвилі на місце неоднорідності створюються умови для виникнення зворотних хвиль напруги та струму, як це передбачено загальним розв'язком телеграфних

рівнянь. Зворотні хвилі у цьому випадку називаються *відбитими*, тому що розглядаються як результат відбиття прямих хвиль від місця неоднорідності.

Справді, припустимо, що пряма хвиля u_φ , рухаючись уздовж однорідної лінії з хвильовим опором Z_C , досягає місця неоднорідності в перетині 2–2' (рис. 2.11).

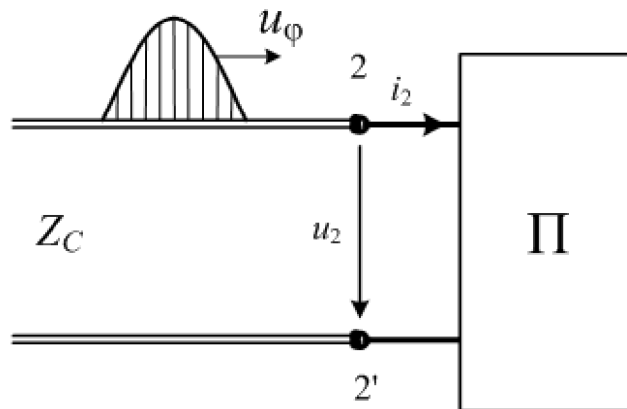


Рис. 2.11

На рис. 2.11 місце неоднорідності заміщується пасивним двополюсником, напруга u_2 та струм i_2 на вході якого є певними функціями часу. Якщо припустити, що після набігання хвилі на місце неоднорідності в лінії існує лише ця пряма хвиля, то для кінцевої точки лінії згідно із законом Ома для хвилі можна записати:

$$u_2 = Z_C i_2. \quad (2.16)$$

З іншого боку, напруга u_2 та струм i_2 повинні бути зв'язаними між собою рівнянням, дійсним для пасивного двополюсника. Це рівняння залежить від схеми та параметрів двополюсника і не обов'язково збігається з (2.16). Залишається прийняти, що після набігання прямої хвилі на місце

неоднорідності напруга та струм місця неоднорідності є результатом накладання прямих та зворотних хвиль:

$$u_2 = u_\varphi + u_\psi; \quad (2.17)$$

$$i_2 = i_\varphi - i_\psi = \frac{1}{Z_C}(u_\varphi - u_\psi). \quad (2.18)$$

Розв'язуючи рівняння (2.17), (2.18) відносно u_φ , дістаємо

$$2u_2 = Z_C i_2 + u_2. \quad (2.19)$$

Вираз (2.19) – основне розрахункове рівняння для визначення напруги та струму в місці відбиття хвиль.

Рівнянню (2.19) відповідає еквівалентна розрахункова схема із зосередженими параметрами, показана на рис. 2.12 (схема Петерсена). Як видно з (2.19) та схеми на рис. 2.12, лінія, по якій рухається хвиля u_φ , для розрахунку напруги u_2 та струму i_2 в місці відбиття, замінюється джерелом напруги $2u_\varphi$ із внутрішнім опором Z_C .

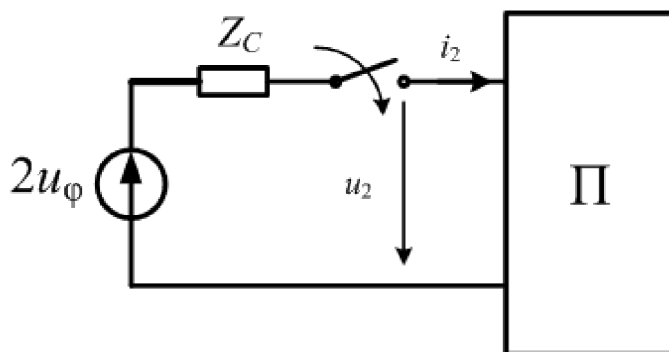


Рис. 2.12

За будь-якої структури місця неоднорідності пасивний двополюсник є еквівалентною схемою із зосередженими параметрами. Розглянемо, наприклад, місце неоднорідності, показане на рис. 2.13. Воно складається з

конденсатора C , увімкненого між точками $2-2'$, а також двох однорідних ліній з хвильовими опорами Z_{C1} і Z_{C2} , що приєднані до лінії з хвильовим опором Z_C у тих же точках.

При набіганні хвилі u_φ на місце неоднорідності між точками $2-2'$ з'являється напруга, яка для ліній Z_{C1} і Z_{C2} є напругою прямих хвиль, що починають рухатись від початку кожної з цих ліній у напрямку до кінця. Ці хвилі називаються *заломленими*, тому що можуть розглядатись як результат заломлення прямої хвилі, яка рухається вздовж лінії з хвильовим опором Z_C , після її набігання на місце неоднорідності. Між струмами та напругами в лініях Z_{C1} і Z_{C2} існує залежність, визначена законом Ома для хвилі: $u = Z_C i$. Отже, для розрахунку відбитих та заломлених хвиль кожна лінія, що відходить від місця неоднорідності, може бути замінена резистивним зосередженим елементом, опір якого дорівнює Z_C . Так еквівалентна схема заміщення для розрахунку перехідного процесу в електричному колі (рис. 2.13) має вигляд, показаний на рис. 2.14.

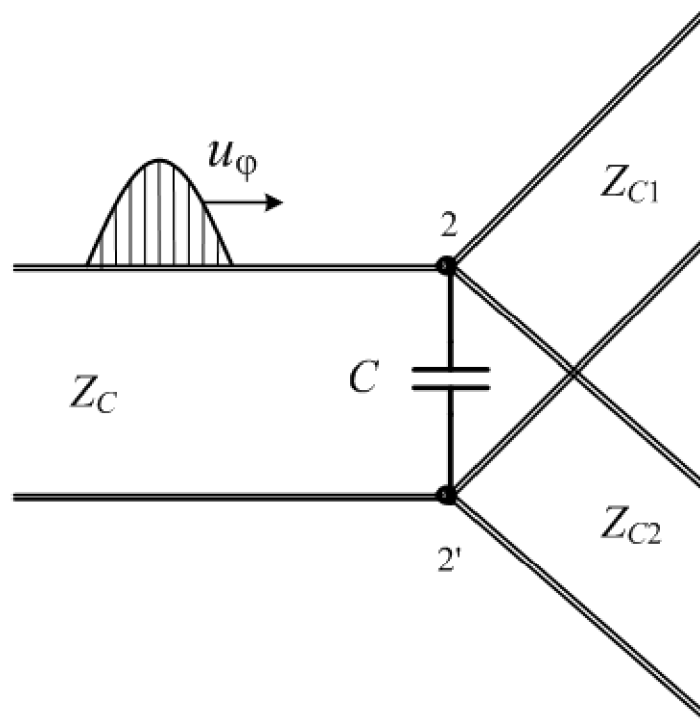


Рис. 2.13

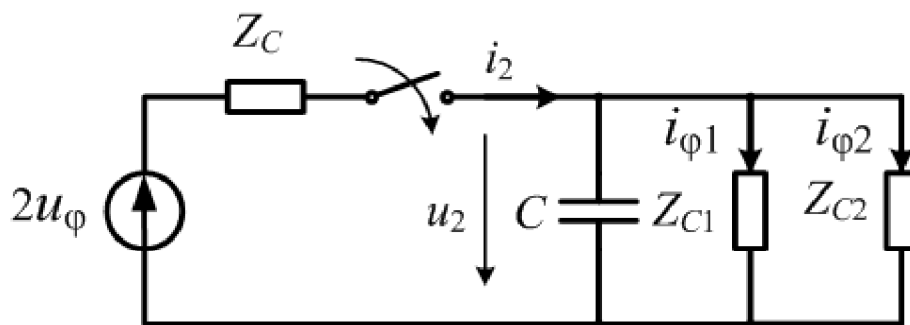


Рис. 2.14

Загальний висновок: розрахунок перехідного процесу в лінії при набіганні хвилі на місце неоднорідності зводиться до розрахунку перехідного процесу в еквівалентному колі із зосередженими параметрами. Знаходячи напругу u_2 і струм i_2 одним з відомих методів (наприклад, класичним або операторним), легко обчислити відбиті хвилі напруги та струму в кінці лінії:

$$u_\psi = u_2 - u_\phi; \quad (2.20)$$

$$i_{\psi} = i_{\phi} - i_2 = \frac{u_{\psi}}{Z_C}. \quad (2.21)$$

Під час обчислень та побудови графіків розподілу напруги та струму зворотних хвиль доцільно час t відраховувати від моменту набігання прямих хвиль на місце неоднорідності, а відстань x – від місця неоднорідності у напрямку руху зворотних хвиль. Тоді перехід від напруги $u_{\psi}(t)$ зворотної хвилі в кінці лінії до напруги цієї хвилі у будь-якій точці виконується заміною аргументу t на $t - \frac{x}{v}$, тобто так, як це робиться під час переходу від напруги (струму) прямої хвилі на початку лінії до напруги прямої хвилі у будь-якій точці. Розрахунок як прямих, так і зворотних хвиль ведеться за одним і тим же правилом. Треба лише для кожної хвилі вибрати свою систему відрахунку часу і відстані.

Потужність у кінці лінії

$$P_2 = u_2 i_2 = (u_{\phi} + u_{\psi}) \frac{u_{\phi} - u_{\psi}}{Z_C} = \frac{u_{\phi}^2}{Z_C} - \frac{u_{\psi}^2}{Z_C} = P_{\phi} - P_{\psi},$$

де P_{ϕ} , P_{ψ} – потужності прямої та зворотної хвиль у кінці лінії.

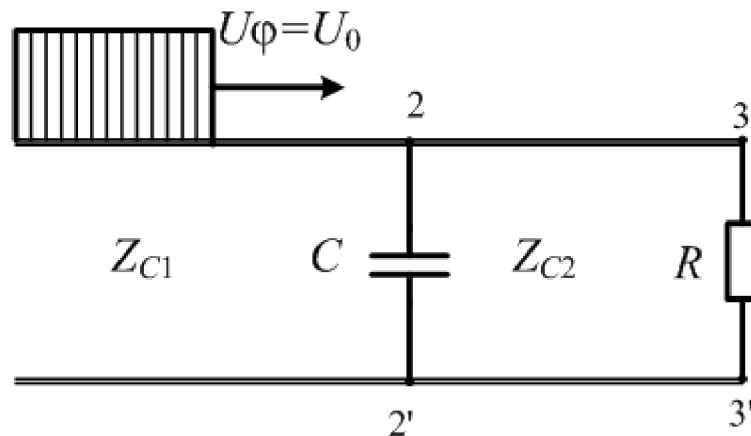
Отже, $P_{\psi} = P_{\phi} - P_2$, тобто зворотна хвиля виникає за рахунок того, що навантаження поглинає не всю електромагнітну енергію, яку приносить пряма хвиля. Тому пряма хвиля називається *падаючою*, а зворотна – *відбитою*.

Якщо лінія має скінченну довжину l , то через час $t = t_l = \frac{l}{v}$ відбита від кінця лінії хвиля повертається до її початку, де знову відбивається, і цей процес теоретично продовжується до нескінченності, а практично триває до повного розсіяння енергії хвиль. Розрахунок перехідного

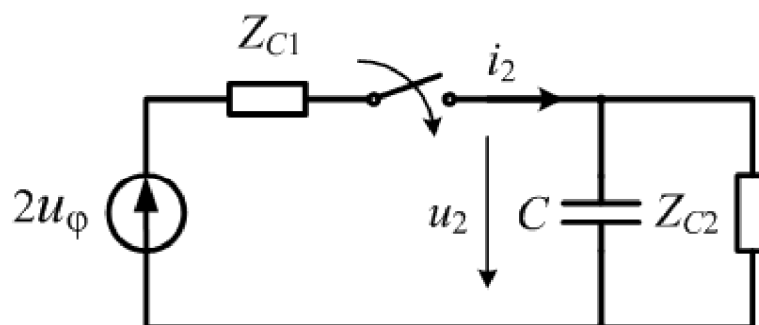
процесу зводиться до послідовного накладання падаючих та відбитих хвиль.

Задача 2.2. Хвиля прямокутної форми напругою U_0 (рис. 2.15, а) переходить з лінії, хвильовий опір якої Z_{C1} , в лінію з хвильовим опором Z_{C2} . У місці з'єднання двох ліній увімкнено конденсатор ємністю C , а в кінці другої лінії ввімкнений резистор R . Побудувати графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній для моменту часу t_0 , коли відбиті та заломлені хвилі ще не дійшли відповідно до початку першої та кінця другої лінії.

Розв'язання. Еквівалентна розрахункова схема для місця неоднорідності наведена на рис. 2.15, б. Перехідна напруга визначається так:



а)



б)

Рис. 2.15

$$u_2 = 2U_0 \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (2.22)$$

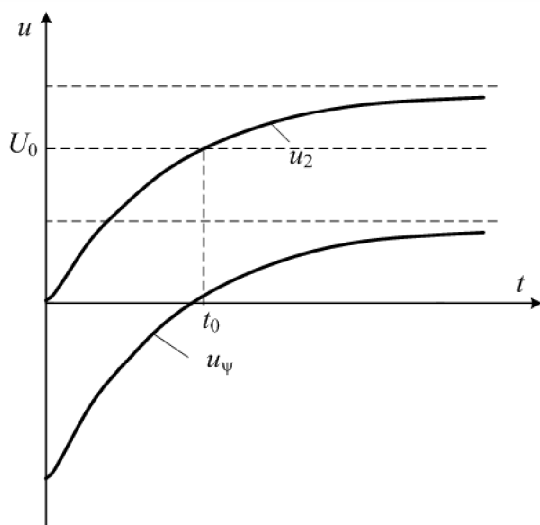
де $\tau = C \frac{Z_{C1} Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}}$.

Нагадаємо, що час t відраховується від моменту набігання прямої хвилі u_ϕ на місце неоднорідності.

Напряга відбитої хвилі у місці неоднорідності

$$\begin{aligned} u_\psi &= u_2 - u_\phi = 2U_0 \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - U_0 = \\ &= U_0 \frac{Z_{C2} - Z_{C1}}{Z_{C1} + Z_{C2}} - 2U_0 \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Залежності $u_2(t)$ та $u_\psi(t)$ у разі, коли $Z_{C2} = 2Z_{C1}$, показані на рис. 2.16.



Отже, ліворуч від місця неоднорідності існують дві хвилі, які рухаються назустріч одна одній – падаюча і відбита. Праворуч від місця неоднорідності вздовж лінії з хвильовим опором Z_{C2} розповсюджується лише заломлена хвиля $u_{\phi2}$, яка у місці

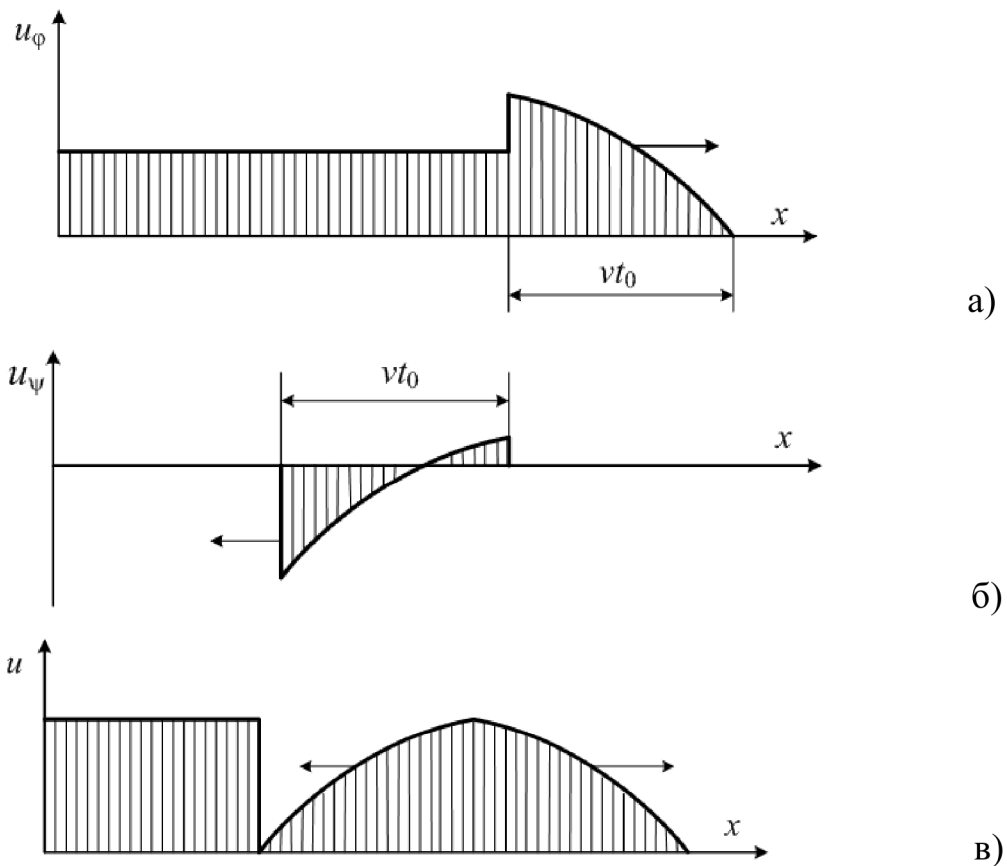
неоднорідності збігається з u_2 .

Рис. 2.16

Для побудови графіків $u_\psi(t_0, x)$ та $u_{\phi 2}(t_0, x)$ досить у (2.22) та (2.23) підставити замість аргументу t аргумент $t - \frac{x}{v}$, далі замість t взяти t_0 , а x змінювати від $x = 0$ до $x = vt_0$.

При цьому вважаємо, що швидкість поширення хвиль в обох лініях однакова, а x відраховується від місця неоднорідності у напрямку поширення кожної з хвиль.

На рис. 2.17 побудовані окремо напруги та струми падаючої, заломленої та відбитої хвиль, а також результат їх накладання.



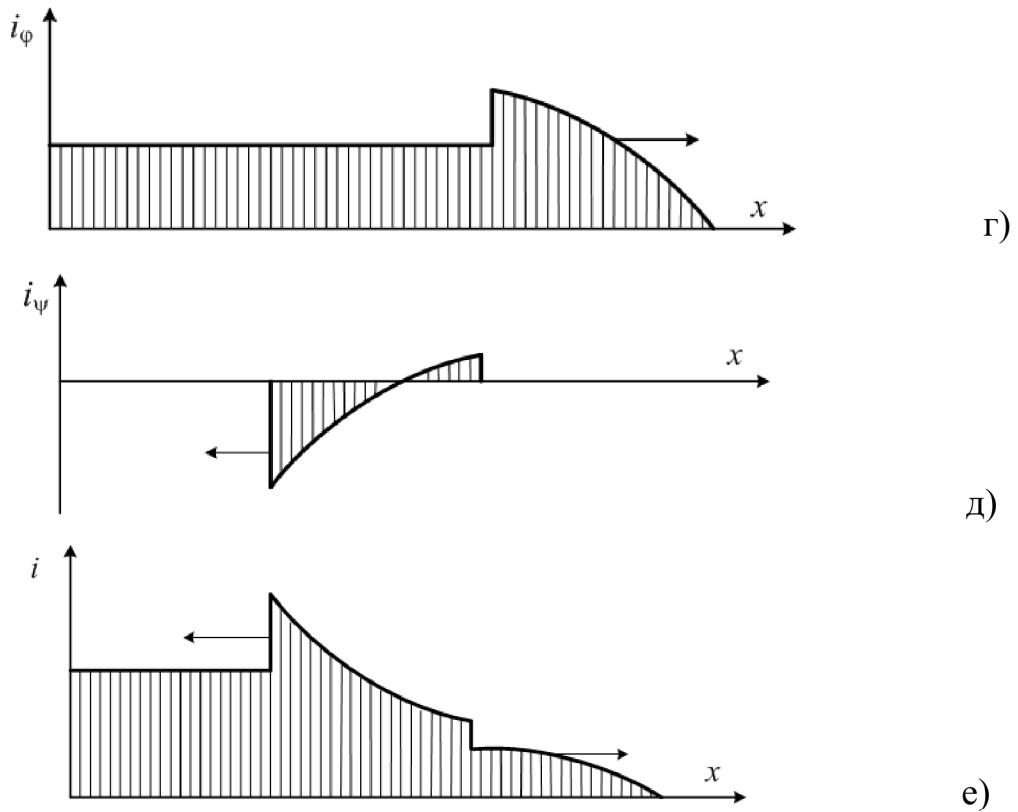


Рис. 2.17

Наведений розрахунок показує, що проходячи повз конденсатора, хвиля з прямовисним фронтом перетворюється на хвилю з похилим фронтом. Фронт відбитої хвилі залишається прямовисним.

Коефіцієнт відбиття

Резистор R починає впливати на розподіл напруг та струмів лише з моменту, коли заломлена хвиля, рухаючись уздовж лінії Z_{c2} , дійде до її кінця. Тут відбувається відбиття хвилі, яке можна визначити за еквівалентною схемою, показаною на рис. 2.18.

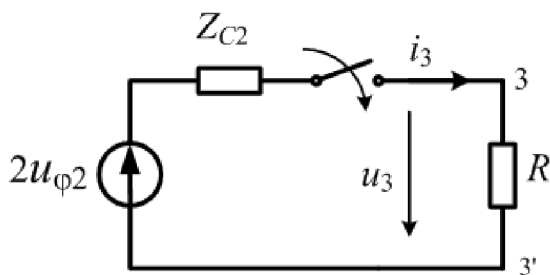


Рис. 2.18

Як видно з еквівалентної схеми, при відбитті від кінця лінії, навантаженої на резистор,

зворотні хвилі $u_{\psi 2}, i_{\psi 2}$ мають таку саму форму, як і падаючі $u_{\varphi 2}, i_{\varphi 2}$:

$$u_3 = 2u_{\varphi 2} \frac{R}{R + Z_{C2}};$$

$$u_{\psi 2} = u_3 - u_{\varphi 2} = \frac{R - Z_{C2}}{R + Z_{C2}} u_{\varphi 2} = nu_{\varphi 2};$$

$$i_{\psi 2} = \frac{u_{\psi 2}}{Z_{C2}} = ni_{\varphi 2},$$

де $n = \frac{R - Z_{C2}}{R + Z_{C2}}$ – коефіцієнт відбиття.

Якщо лінія на кінці розімкнена ($R = \infty$), то $n = 1$ і $u_{\psi 2} = u_{\varphi 2}$, $i_{\psi 2} = i_{\varphi 2}$, тобто хвиля відбивається повністю, без зміни знака.

Напруга на кінці лінії подвоюється: $u_3 = 2u_{\varphi 2}$, а струм $i_3 = 0$. Якщо лінія на кінці короткозамкнена ($R = 0$), то $n = -1$ і $u_{\psi 2} = -u_{\varphi 2}$, $i_{\psi 2} = -i_{\varphi 2}$, тобто хвиля відбивається повністю, але змінює знак.

Напруга на кінці лінії $u_3 = 0$, а струм подвоюється: $i_3 = 2i_{\varphi 2}$.

Якщо $R = Z_{C2}$, то $n = 0$, $u_{\psi 2} = 0, i_{\psi 2} = 0$, і відбитої хвилі немає.

Енергія падаючої хвилі повністю поглинається резистором $R = Z_{C2}$ (узгоджене навантаження).

Операторний коефіцієнт відбиття

Застосувавши перетворення Лапласа до (2.17), (2.18), (2.19), запишемо:

$$U_2(p) = U_{\varphi}(p) + U_{\psi}(p); \quad (2.24)$$

$$I_2(p) = I_\varphi(p) - I_\psi(p) = \frac{1}{Z_C} [U_\varphi(p) - U_\psi(p)]; \quad (2.25)$$

$$2U_\varphi(p) = Z_C I_2(p) + U_2(p). \quad (2.26)$$

Напруга $U_2(p)$ та струм $I_2(p)$ на затискачах пасивного двополюсника (рис. 2.12) пов'язані співвідношенням

$$U_2(p) = Z(p)I_2(p), \quad (2.27)$$

де $Z(p)$ – вхідний операторний опір пасивного двополюсника.

З (2.26), (2.27) маємо:

$$U_2(p) = \frac{2Z(p)}{Z(p) + Z_C} U_\varphi(p). \quad (2.28)$$

Підставляючи (2.28) в (2.24), дістанемо

$$\begin{aligned} U_\psi(p) = U_2(p) - U_\varphi(p) &= \frac{2Z(p)}{Z(p) + Z_C} U_\varphi(p) - U_\varphi(p) = \\ &= \frac{Z(p) - Z_C}{Z(p) + Z_C} U_\varphi(p). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Отже, можна записати:

$$U_\psi(p) = N(p)U_\varphi(p); \quad I_\psi(p) = \frac{U_\psi(p)}{Z_C} = N(p)I_\varphi(p),$$

де $N(p) = \frac{Z(p) - Z_C}{Z(p) + Z_C}$ – операторний коефіцієнт відбиття. (2.30)

Операторне зображення напруги (струму) прямої хвилі, помножене на операторний коефіцієнт відбиття, дає операторне зображення напруги (струму) зворотної хвилі. Далі переходимо до оригіналів і знаходимо

$u_{\psi}(t)$ або $i_{\psi}(t)$ у місці неоднорідності і, нарешті, $u_{\psi}(t, x) = u_{\psi}\left(t - \frac{x}{v}\right)$,

$$i_{\psi}(t, x) = i_{\psi}\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

2.2.3. Типові розв'язані задачі

Задача 2.3. Повітряна лінія довжиною $l = 30$ км, навантажена в кінці на резистор $R_2 = 800$ Ом, вмикається до джерела постійної напруги $U_0 = 210$ кВ. Хвильовий опір лінії $Z_c = 400$ Ом. Побудувати графіки розподілу напруги та струму через час:

1) $t_0 = 150$ мкс; 2) $t_0 = 250$ мкс після ввімкнення лінії.

Розв'язання. При $t = 0$ на початку лінії виникають прямі хвилі напруги $U_{\phi} = U_0 = 210$ кВ та струму $i_{\phi} = u_{\phi} / Z_c = 525$ А. Ці хвилі пробігають відстань l за $t_l = l / v = 100 \cdot 10^{-6}$ с, тобто в момент $t = t_l$ спостерігається відбиття прямих хвиль від кінця і зворотні хвилі u_{ψ} і i_{ψ} пробігають відстань $l_{\psi} = (t_0 - t_l)v = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^5 = 15$ км.

Напругу та струм зворотних хвиль знайдемо, виходячи з коефіцієнта відбиття в кінці лінії:

$$n_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c} = \frac{800 - 400}{1200} = \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$u_{\psi} = nu_{\phi} = 210 / 3 = 70 \text{ кВ}; \quad i_{\psi} = \frac{u_{\psi}}{Z_c} = 70 \cdot 10^3 / 400 = 175 \text{ А}.$$

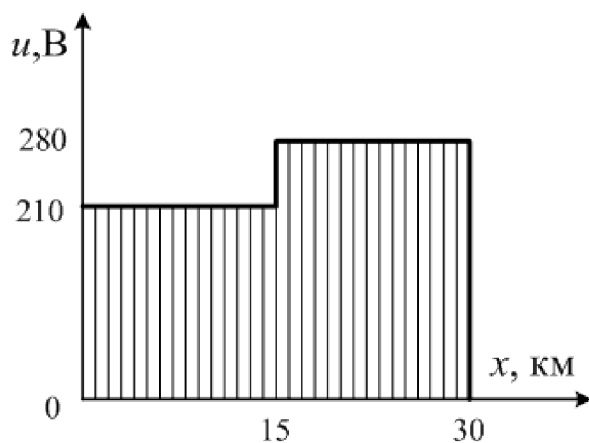
Побудова графіків $u(x), i(x)$ зводиться до накладання прямих та зворотних хвиль з прямовисним фронтом (рис. 2.19, а, б).

За $t_0 = 250$ мкс зворотні хвилі напруги та струму встигають відбитись від початку лінії з коефіцієнтом відбиття $n_1 = -1$, тому що внутрішній опір джерела дорівнює нулеві. Відбиті від початку лінії хвилі:
 $u_{\phi 1} = -u_{\psi} = -70$ кВ, $i_{\phi 1} = -i_{\psi} = -175$ А.

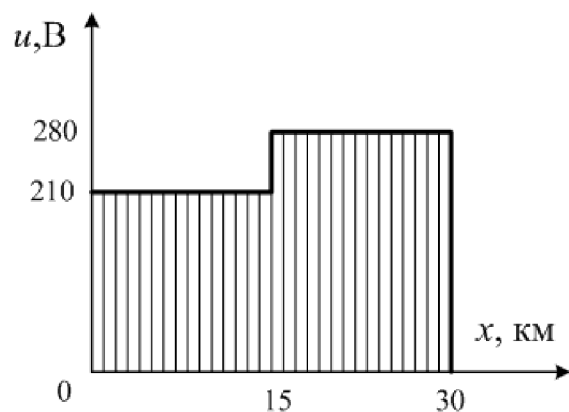
Ці хвилі пробігають у напрямку до кінця лінії відстань

$$l_{\phi 1} = v(t_0 - 2t_l) = 3 \cdot 10^5 \cdot 250 \cdot 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-6} = 15 \text{ км.}$$

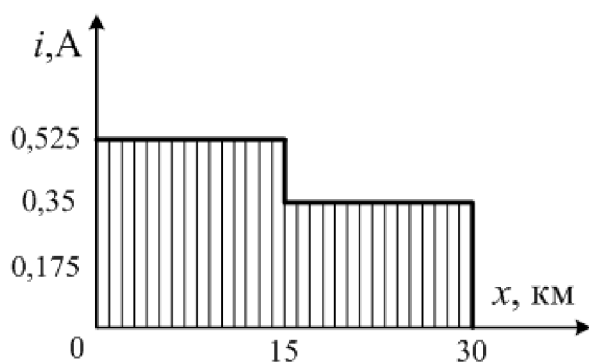
Графіки для $u(x)$ та $i(x)$ показані на рис. 2.19, в, г.



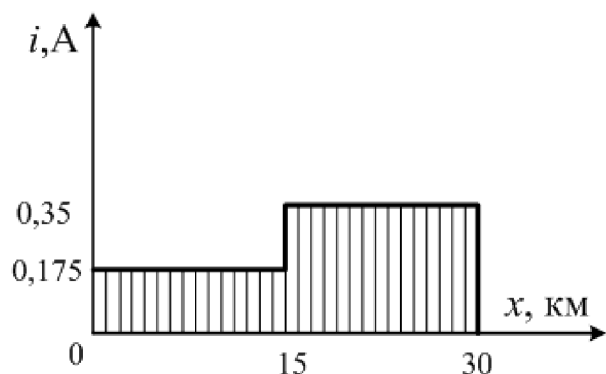
а)



в)



б)



г)

Задача 2.4. У кінці повітряної лінії ($l = 60$ км, $Z_c = 40$ Ом) увімкнено пасивний двополюсник, який складається з послідовно з'єднаних $R = 100$ Ом та $L = 100$ мГн. При $t = 0$ лінія вмикається до джерела постійної напруги $U_0 = 10$ кВ.

Записати вирази розподілу напруги та струму вздовж лінії для моменту часу, коли хвиля, відбившись від кінця лінії, дійде до її середини.

Розв'язання. Відстань $l = 60$ км хвиля пробігає за час $t_1 = \frac{l}{v} = \frac{60}{3 \cdot 10^5} = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с. Отже, відбита від кінця лінії хвиля дійде до середини лінії через $t_2 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ с після ввімкнення джерела напруги U_0 або через $t_3 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ с після відбиття.

Струм i_2 в кінці лінії знайдемо за еквівалентною схемою (рис. 2.20) класичним або операторним методом:

$$i_2(t) = \frac{2U_0}{Z_c + R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (2.31)$$

де $\tau = \frac{L}{Z_c + R} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{500} = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с, а час t відраховується від

моменту набігання прямої хвилі на кінець лінії.

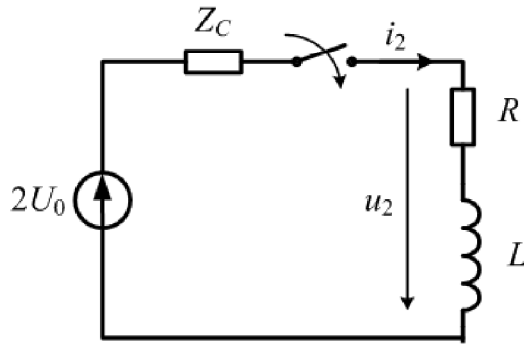


Рис. 2.20

Підставляючи в (2.31) числові значення, дістанемо

$$i_2(t) = 40(1 - e^{-5000t}).$$

Струм відбитої хвилі в кінці лінії

$$i_\psi(t) = i_\phi(t) - i_2(t) = 25 - 40(1 - e^{-5000t}) = -15 + 40e^{-5000t}. \quad (2.32)$$

Напряга відбитої хвилі в кінці лінії

$$u_\psi(t) = Z_c i_\psi = -6000 + 16000e^{-5000t}. \quad (2.33)$$

На ділянці $0 \leq x \leq 30$ км існує лише пряма хвиля, тобто

$$u = u_\phi = 10000 \text{ В}, \quad i = i_\phi \frac{u_\phi}{Z_c} = \frac{10000}{400} = 25 \text{ А}.$$

При $30 \text{ км} \leq x \leq 60$ км:

$$u = u_\phi + u_\psi = 10000 + \left[-6000 + 16000e^{-5000\left(t_3 - \frac{l-x}{v}\right)} \right] = \\ = 4000 + 16000e^{-5000\left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{v}\right)} \text{ В};$$

$$i = i_{\varphi} - i_{\psi} = 25 - \left[-15 + 40e^{-5000\left(t_3 - \frac{l-x}{v}\right)} \right] =$$

$$= 40 - 40e^{-5000\left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{v}\right)} \text{ А.}$$

Задача. 2.5. Повітряна лінія (рис. 2.21) довжиною $l = 30$ км і хвильовим опором $Z_c = 500$ Ом замкнена в кінці на паралельно з'єднані $R = 1500$ Ом та $C = 0,4$ мкФ. При $t = 0$ лінія вмикається через зосереджену індуктивність $L = 0,1$ Гн до джерела постійної напруги $E = 100$ В. Побудувати графіки розподілу напруги та струму в лінії через $t_0 = 0,15 \cdot 10^{-3}$ с після комутації.

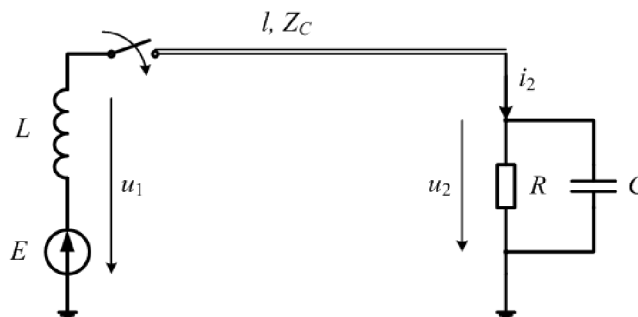


Рис. 2.21

Розв'язання. Еквівалентна схема для розрахунку прямої хвилі u_{φ} показана на рис. 2.22, а.

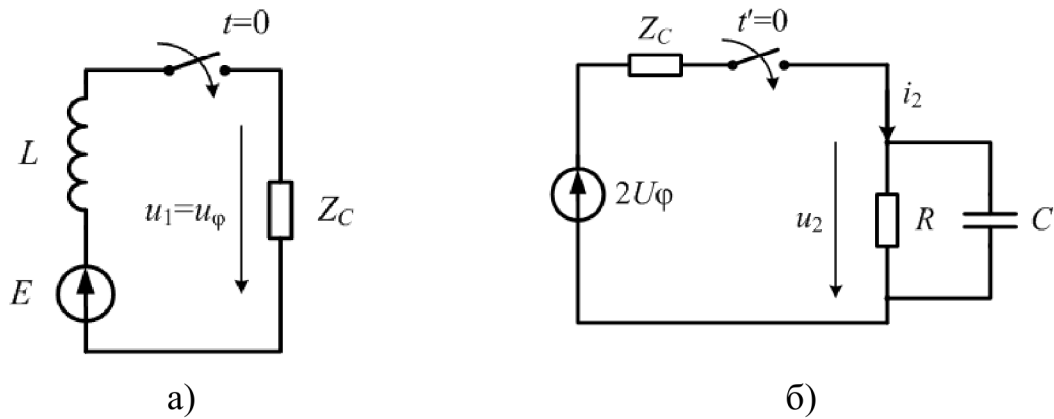


Рис. 2.22

Класичним або операторним методом здобудемо

$$u_{\phi} = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) = 100 \left(1 - e^{-5000t} \right),$$

$$\text{де } \tau_1 = \frac{L}{Z_c} = \frac{0,1}{500} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с;}$$

$$u_{\phi}(t, x) = 100 \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{x}{v} \right)} \right].$$

Відстань $l = 30$ км пряма хвиля пробігає за час

$$t_1 = \frac{l}{v} = \frac{30}{3 \cdot 10^5} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ с. Отже, зворотна хвиля, яка є результатом}$$

відбиття прямої хвилі від кінця лінії, встигає пробігти відстань 15 км.

Для обчислення напруги u_2 в кінці лінії використовуємо еквівалентну схему, показану на рис. 2.22, б, в якій

$$2u_{\phi} = 2E \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_1}} \right) = 200 \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_1}} \right).$$

Тут час t' відрховується з моменту набігання прямої хвилі на кінець лінії.

Застосуємо інтеграл Дюамеля:

$$u_2(t') = 2u_\phi(0)h(t') + \int_0^{t'} 2u'_\phi(\tau)h(t' - \tau)\beta\tau,$$

де $h(t')$ – перехідна функція напруги на конденсаторі:

$$h(t') = \frac{R}{R + Z_c} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) = \frac{1500}{2000} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) = 0,75 \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right);$$

$$\tau_2 = \frac{RZ_c}{R + Z_c} C = \frac{1500 \cdot 500}{2000} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad u_\phi(0) = 0.$$

Виконуємо інтегрування:

$$u_2(t') = \int_0^{t'} 2E \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} \left(0,75 - 0,75e^{-\frac{t'}{\tau_2}} e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} \right) = 150 \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau_1}} \right) -$$

$$-450 \left(e^{-\frac{t'}{\tau_1}} - e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \right) = 150 - 600e^{-\frac{t'}{\tau_1}} + 450e^{-\frac{t'}{\tau_2}}.$$

Напруга зворотної хвилі в кінці лінії

$$u_\psi(t') = u_2(t') - u_\phi(t') = 50 - 500e^{-\frac{t'}{\tau_1}} + 450e^{-\frac{t'}{\tau_2}}. \quad (2.34)$$

Струм зворотної хвилі в кінці лінії

$$i_\psi(t') = \frac{u_\psi(t')}{Z_c} = 0,1 - 1,0e^{-\frac{t'}{\tau_1}} + 0,9e^{-\frac{t'}{\tau_2}}. \quad (2.35)$$

Графіки $u_\psi(t')$ та $i_\psi(t')$ побудовані на рис. 2.23, де показано момент часу $t' = 0,05 \cdot 10^{-3}$ с, що відповідає значенню $t_0 = 0,15 \cdot 10^{-3}$ с. Для цього моменту часу розподіл напруги зворотної хвилі уздовж лінії описується так:

$$u_{\psi} = 50 - 500e^{-\frac{1}{\tau_1}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{y}{v}\right)} + 450e^{-\frac{1}{\tau_2}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{y}{v}\right)}, \quad (2.36)$$

де $y = l - x$ — координата, що відраховується від кінця лінії, причому $0 \leq y \leq 15$ км.

Для струму зворотної хвилі у той же момент часу маємо

$$i_{\psi} = 0,1 - 1,0e^{-\frac{1}{\tau_1}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{y}{v}\right)} + 0,9e^{-\frac{1}{\tau_2}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{y}{v}\right)}. \quad (2.37)$$

Отже, при $0 \leq x \leq 15$ км: $u = u_{\phi} = 100 \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_1}\left(0,15 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{v}\right)} \right]; \quad (2.38)$

$$i = i_{\phi} = \frac{u_{\phi}}{Z_c}; \quad (2.39)$$

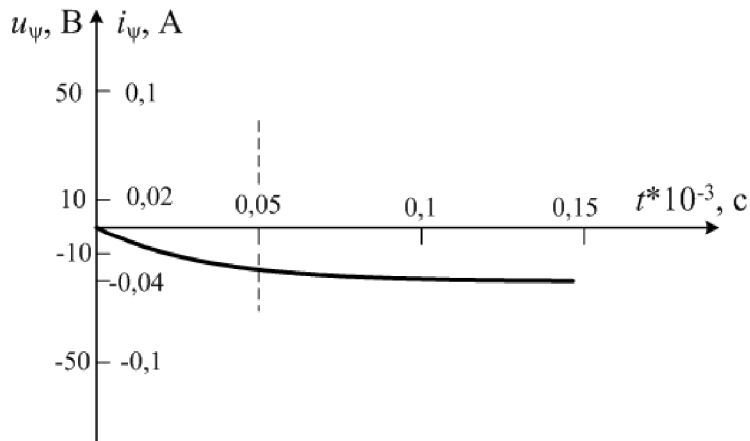


Рис. 2.23

при $15 \text{ км} \leq x \leq 30 \text{ км}$ ($0 \leq y \leq 15 \text{ км}$):

$$u = u_{\phi} + u_{\psi} = 100 \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau_1}\left(0,15 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{v}\right)} \right] + 50 - 500e^{-\frac{1}{\tau_1}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{l-x}{v}\right)} + 450e^{-\frac{1}{\tau_2}\left(0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{l-x}{v}\right)}; \quad (2.40)$$

$$i = i_{\phi} - i_{\psi} = \frac{1}{Z_c} (u_{\phi} - u_{\psi}). \quad (2.41)$$

Графіки розподілу напруги та струму в лінії через $t_0 = 0,15 \cdot 10^{-3}$ с після комутації, побудовані за рівняннями (2.36)–(2.41), показано на рис. 2.24,а-г.

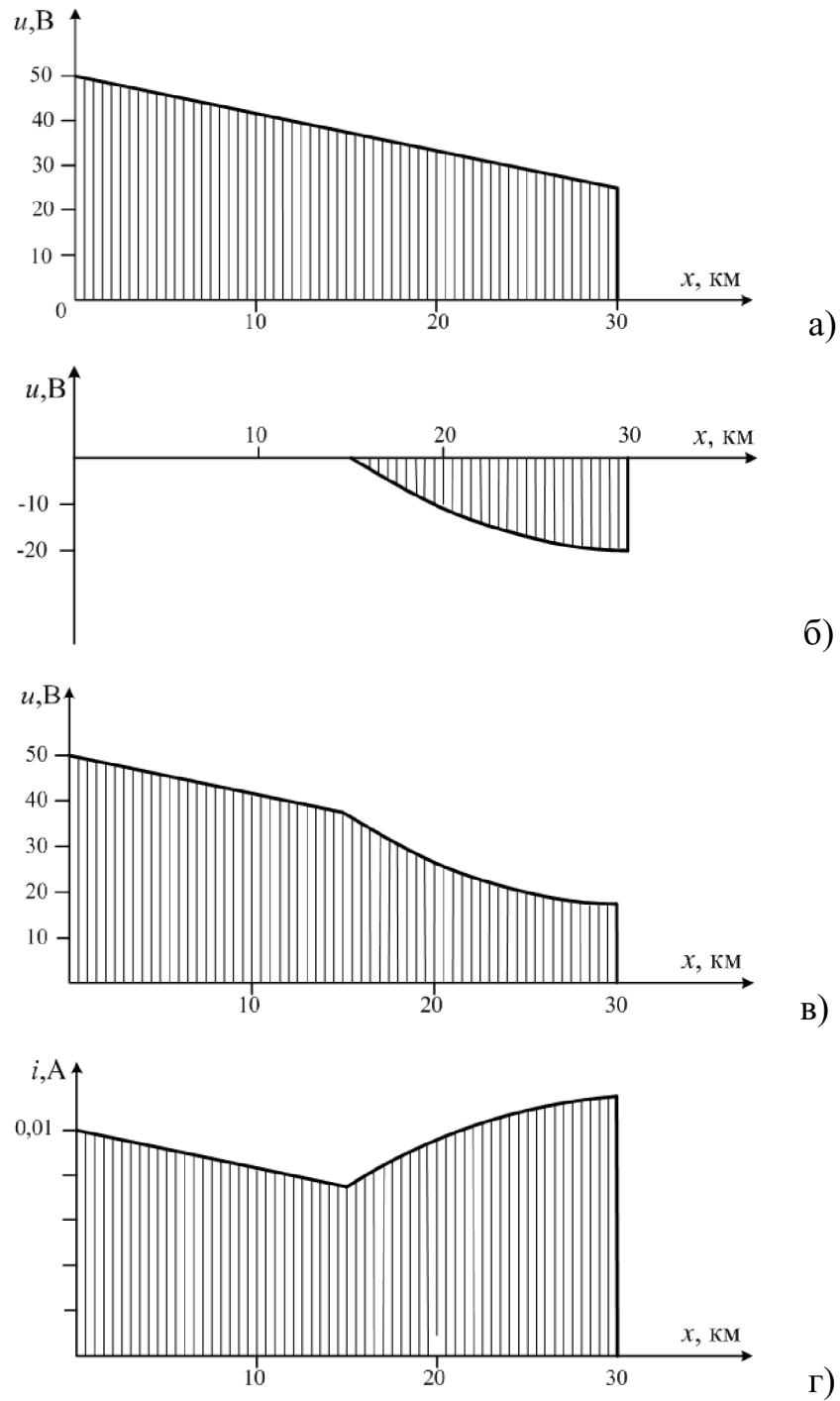


Рис. 2.24

Задача 2.6. Побудувати графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній (рис. 2.25, а) через $t_0 = 100$ мкс після того, як пряма хвиля добіжить до кінця першої лінії. Напруга джерела живлення $U_0 = 100$ В. Параметри кола: $l_1 = 30$ км, $Z_{c1} = 50$ Ом; $v_1 = 1,5 \cdot 10^5$ км/с, $l_2 = 20$ км, $Z_{c2} = 400$ Ом, $v_2 = 3 \cdot 10^5$ км/с, $R = 100$ Ом, $L = 5$ мГн.

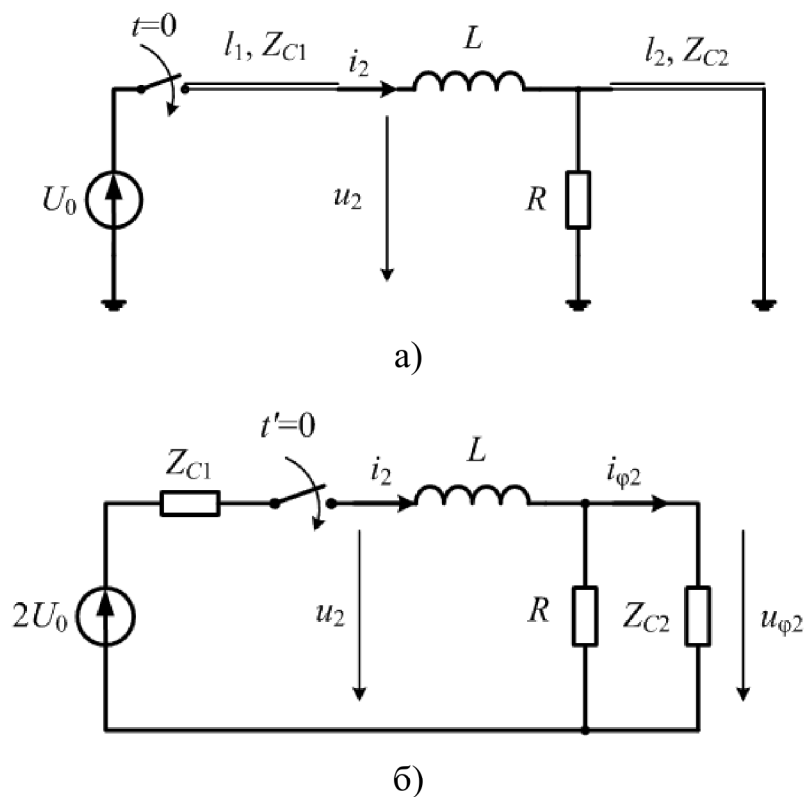


Рис. 2.25

Розв'язання. Напруга та струм прямих хвиль у першій лінії мають постійні значення: $u_{\phi 1} = U_0 = 100$ В, $i_{\phi 1} = u_{\phi 1} / Z_{c1} = 100 / 50 = 2$ А. Через $t_1 = l_1 / v_1 = 30 / 1,5 \cdot 10^5 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с пряма хвиля добігає до кінця першої лінії, де відбувається її відбиття і виникає заломлена хвиля в другій лінії. Для знаходження відбитих та заломлених хвиль складемо еквівалентну

схему (рис. 2.25, б), за якою розрахуємо напругу та струм у місці, де хвиля переходить з першої лінії на другу.

У всіх наведених далі формулах час t' відраховується з моменту набігання прямої хвилі на кінець першої лінії.

Струм i_2 знайдемо класичним методом:

$$i_2 = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{вільн}}, \text{ де вимушений струм}$$

$$i_{2\text{вим}} = \frac{2U_0}{Z_{c1} + RZ_{c2} / (R + Z_{c2})} = \frac{200}{130} = 1,538 \text{ А.}$$

$$\text{Характеристичне рівняння кола} \quad Z_{c1} + pL + \frac{RZ_{c2}}{R + Z_{c2}} = 0,$$

$$\text{звідки } p = -2,6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Отже, } i_2 = 1,538 + Ae^{-2,6 \cdot 10^4 t'} \text{ А.}$$

Сталу A знаходимо з початкової умови

$$i_2(0) = i_2(-0) = 0, \text{ тобто } A = -1,538.$$

$$\text{Шуканий струм } i_2 = 1,538 - 1,538e^{-2,6 \cdot 10^4 t'}.$$

Струм зворотної хвилі в кінці першої лінії

$$i_{\psi 1} = i_{\phi 1} - i_2 = 0,4615 + 1,538e^{-2,6 \cdot 10^4 t'} \text{ А.}$$

Напруга зворотної хвилі

$$u_{\psi 1} = Z_{c1} i_{\psi 1} = 23,075 + 76,925e^{-2,6 \cdot 10^4 t'} \text{ В.}$$

Напруга заломленої хвилі, яка починає поширюватись від початку другої лінії:

$$u_{\phi 2} = \frac{RZ_{c2}}{R + Z_{c2}} i_2 = 80 \cdot i_2 = 123,08 - 123,08e^{-2,6 \cdot 10^4 t'}.$$

Струм заломленої хвилі

$$i_{\varphi 2} = \frac{u_{\varphi 2}}{Z_{c2}} = 0,3077 - 0,3077e^{-2,6 \cdot 10^4 t'}$$

За $t_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ с зворотна хвиля пробігає відстань $v_1 t_0 = 15$ км, тобто не встигає повторно відбитись від початку лінії l_1 . За цей же час хвиля, яка поширюється в другій лінії, пробігає відстань $v_2 t_0 = 30$ км, тобто встигає відбитись від кінця лінії і відбита хвиля пробігає 10 км у напрямку від кінця другої лінії до її початку.

Коефіцієнт відбиття у кінці другої лінії:

$$n_2 = -1, \text{ тому що лінія закорочена.}$$

Отже,

$$u_{\psi 2} = -u_{\varphi 2} = -\left(123,08 - 123,08e^{-2,6 \cdot 10^4 t''}\right);$$
$$i_{\psi 2} = \frac{u_{\psi 2}}{Z_{c2}} = -i_{\varphi 2} = -\left(0,3077 - 0,3077e^{-2,6 \cdot 10^4 t''}\right).$$

Тут час t'' відраховується від моменту набігання хвилі $u_{\varphi 2}$ на кінець другої лінії.

За результатами розрахунку будемо графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній l_1 та l_2 для моменту часу $t_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ с після набігання хвилі на кінець першої лінії:

при $0 \leq x \leq 15$ км

$$u = u_{\varphi 1} = 100 \text{ В}; i = i_{\varphi 1} = 2 \text{ А};$$

при $15 \text{ км} \leq x \leq l_1 = 30$ км:

$$u = u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = 123,08 + 76,925e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{l_1 - x}{v_1} \right)};$$

$$i = i_{\varphi 1} - i_{\psi 1} = 1,538 - 1,538e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{l_1 - x}{v_1} \right)};$$

при $30 \text{ км} \leq x \leq l_1 = 40 \text{ км}$:

$$u = u_{\varphi 2} = 123,08 - 123,08e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x - l_1}{v_2} \right)};$$

$$i = i_{\varphi 2} = 0,3077 - 0,3077e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x - l_1}{v_2} \right)};$$

при $40 \text{ км} \leq x \leq l_1 + l_2 = 50 \text{ км}$:

$$u = u_{\varphi 2} + u_{\psi 2} = -123,08e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x - l_1}{v_2} \right)} +$$

$$+ 123,08e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{l_2}{v_2} - \frac{50 - x}{v_2} \right)};$$

$$i = i_{\varphi 2} - i_{\psi 2} = 0,6154 - 0,3077e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x - l_1}{v_2} \right)} -$$

$$- 0,3077e^{-2,6 \cdot 10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{l_2}{v_2} - \frac{50 - x}{v_2} \right)}.$$

У наведених виразах координата x відраховується від початку першої лінії. Криві u_{ψ} та i_{ψ} побудовані на рис. 2.26.

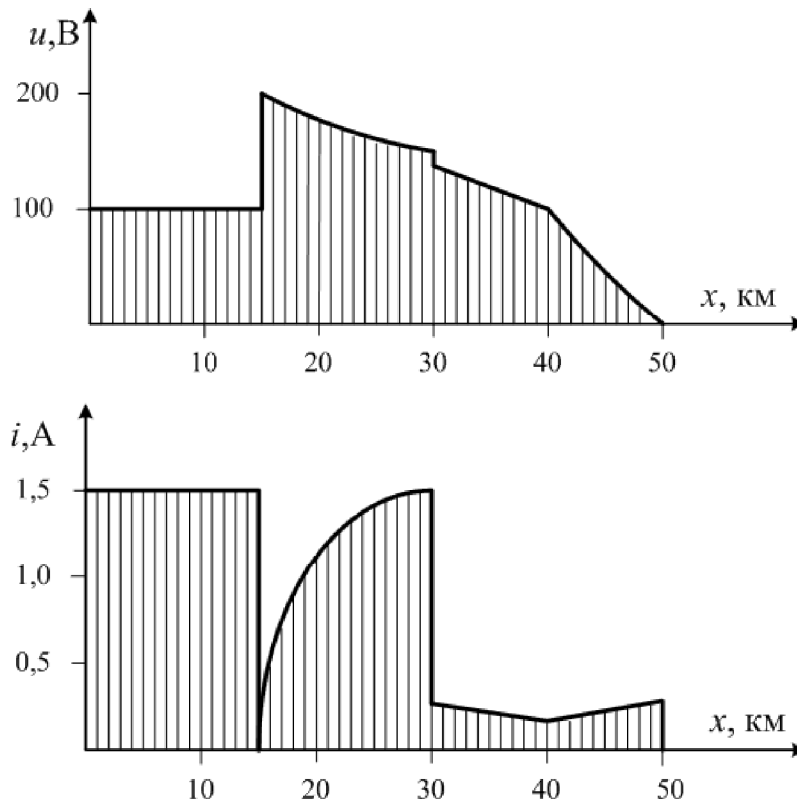


Рис. 2.26

Задача 2.7. Хвиля напруги, що має форму прямокутного імпульсу тривалістю $t_0 = 40$ мкс і амплітудою $U_0 = 100$ В переходить з повітряної лінії $l_1 = 80$ км, $Z_{c1} = 450$ Ом, $v_1 = 3 \cdot 10^5$ км/с через послідовно ввімкнений конденсатор ємністю $C = 0,4$ мкФ у кабельну лінію ($l_2 = 40$ км, $Z_{c2} = 50$ Ом, $v_2 = 1,5 \cdot 10^5$ км/с).

Побудувати графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній через $t_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ с після надходження хвилі у місце з'єднання ліній.

Розв'язання. Напруга прямої хвилі на початку першої лінії

$$u_{\phi 1}(t) = 100 \cdot 1(t) - 100 \cdot 1(t - t_0).$$

У місці з'єднання ліній пряма хвиля описується рівняннями:

$$u_{\phi 1}(t') = 100 \cdot 1(t') - 100 \cdot 1(t' - t_0);$$

$$i_{\varphi 1}(t') = \frac{u_{\varphi 1}}{Z_{c1}} = \frac{10}{45} \cdot 1(t') - \frac{10}{45} \cdot 1(t' - t_0)$$

Тут час t' відрховується від моменту набігання прямої хвилі на місце з'єднання ліній: $t' = t - \frac{l_1}{v_1}$. У місці з'єднання ліній відбувається відбиття і заломлення прямої хвилі. Еквівалентна схема для розрахунку напруг та струмів у місці переходу а однієї лінії на іншу показана на рис. 2.27.

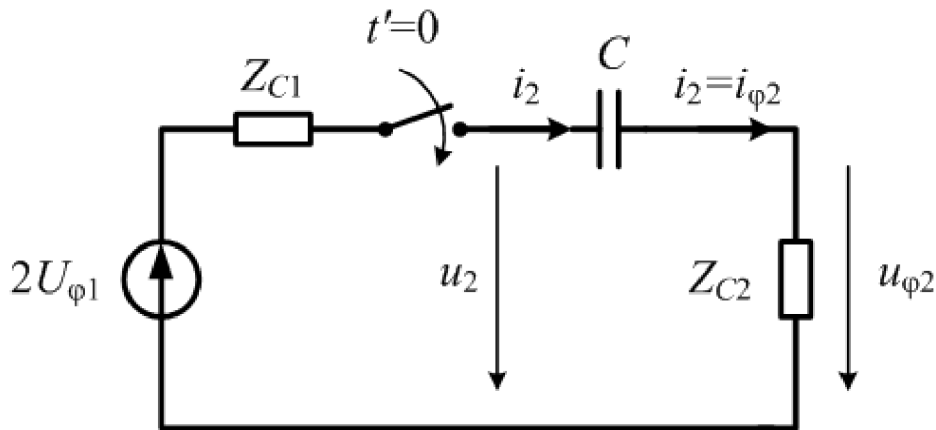


Рис. 2.27

Струм i_2 знаходимо операторним методом. Початкова напруга на конденсаторі дорівнює нулю, тому

$$I_2(p) = \frac{2U_{\varphi 1}(p)}{Z(p)}, \quad \text{де } 2U_{\varphi 1}(p) = \frac{200}{p} - \frac{200}{p} e^{-pt_0};$$

$$Z(p) = Z_{c1} + \frac{1}{pC} + Z_{c2} = 500 + \frac{2,5 \cdot 10^6}{p} = \frac{500p + 2,5 \cdot 10^6}{p}.$$

Тепер маємо

$$I_2(p) = \frac{200}{500p + 2,5 \cdot 10^6} - \frac{200}{500p + 2,5 \cdot 10^6} e^{-pt_0}.$$

Переходячи до оригіналу, дістанемо

$$i_2(t') = 0,4e^{-5000t'} \cdot 1(t') - 0,4e^{-5000(t'-t_0)} \cdot 1(t' - t_0).$$

Струм відбитої хвилі в кінці першої лінії

$$i_{\psi 1} = i_{\phi 1} - i_2 = \left(\frac{10}{45} - 0,4e^{-5000t'} \right) \cdot 1(t') - \left[\frac{10}{45} - 0,4e^{-5000(t'-t_0)} \right] \cdot 1(t' - t_0).$$

Напруга відбитої хвилі в кінці першої лінії

$$u_{\psi 1} = Z_{c1} i_{\psi 1} = \left(100 - 180e^{-5000t'} \right) \cdot 1(t') - \left[100 - 180e^{-5000(t'-t_0)} \right] \cdot 1(t' - t_0).$$

Струм заломленої хвилі на початку другої лінії $i_{\phi 2}(t') = i_2(t')$.

Напруга заломленої хвилі

$$u_{\phi 2} = i_{\phi 2} Z_{c2} = 20e^{-5000t'} \cdot 1(t') - 20e^{-5000(t'-t_0)} \cdot 1(t' - t_0).$$

Оскільки тривалість імпульсу напруги (струму) прямої хвилі в першій лінії становить 40 мкс, то для моменту $t_1 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ с після відбиття напруга (струм) прямої хвилі в кожній точці першої лінії дорівнює нулю. У цей момент часу в першій лінії існує лише зворотна хвиля, а в другій – лише заломлена пряма хвиля.

Розподіл напруги та струму вздовж ліній описується виразами, в яких координата x відраховується від початку першої лінії:

при $0 \leq x \leq 80$ км:

$$u(x) = \left[100 - 180e^{-5000 \left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{80-x}{3 \cdot 10^5} \right)} \right] \cdot 1 \left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{80-x}{3 \cdot 10^5} \right) -$$

$$- \left[100 - 180e^{-5000 \left(0,16 \cdot 10^{-3} - \frac{80-x}{3 \cdot 10^5} \right)} \right] \cdot 1 \left(0,16 \cdot 10^{-3} - \frac{80-x}{3 \cdot 10^5} \right);$$

$$i(x) = -\frac{u(x)}{Z_{c1}};$$

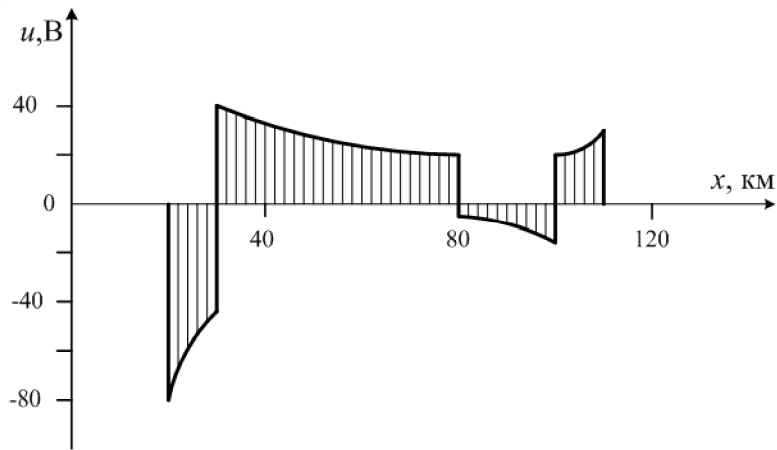
при $80 \text{ км} \leq x \leq 120$ км:

$$u(x) = 20e^{-5000\left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{x-80}{1,5 \cdot 10^5}\right)} \cdot 1\left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{x-80}{1,5 \cdot 10^5}\right) =$$

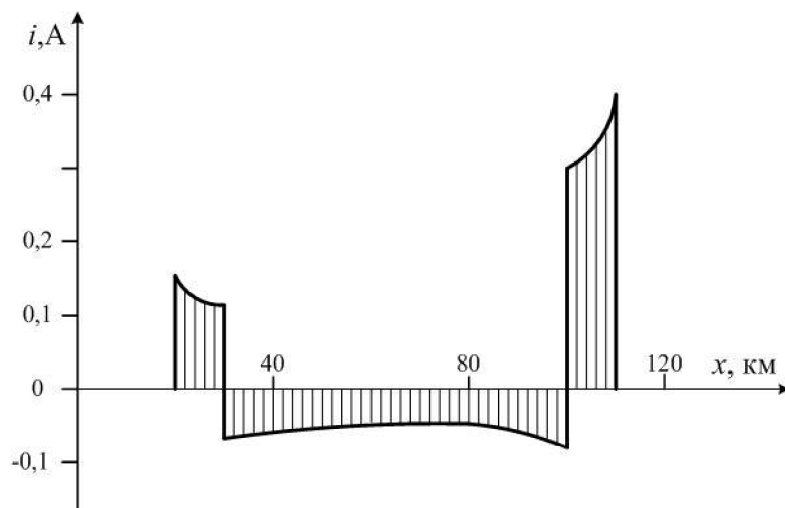
$$= -20e^{-5000\left(0,16 \cdot 10^{-3} - \frac{x-80}{1,5 \cdot 10^5}\right)} \cdot 1\left(0,16 \cdot 10^{-3} - \frac{x-80}{1,5 \cdot 10^5}\right);$$

$$i(x) = -\frac{u(x)}{Z_{c2}}.$$

Криві $u(x)$ та $i(x)$ зображені на рис. 2.28, а, б.



а)



б)

Рис. 2.28

2.3. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів у лініях при комутаціях у разі ненульових початкових умов

При кожній комутації, тобто при вмиканні та вимиканні окремих гілок, розміщених у будь-якому місці лінії, виникають хвилі напруги та струму, які поширюються від місця комутації. Розрахунок хвиль, як правило, здійснюється методом накладання і зводиться до ввімкнення джерела напруги або струму в пасивне коло, тобто за нульових початкових умов.

Розглянемо коло, схема якого показана на рис. 2.29, а. У місці з'єднання двох однорідних ліній з хвильовими опорами Z_{c1} і Z_{c2} вмикають активний двополюсник A із зосередженими параметрами. Для знаходження хвиль, які виникають у місці комутації, зведемо розрахунок перехідних процесів до нульових початкових умов. Для цього необхідно визначити напругу $u_{ab}(t)$ на розімкненому ключі (рис. 2.29, а) і перейти до схеми на рис. 2.29, б, в якій діє лише одне джерело напруги, ввімкнене послідовно з ключем. Струми та напруги, обчислені за схемою на рис. 2.29, б накладаються на струми та напруги, які існували в лінії до комутації. Результатом є струми та напруги в лінії після комутації.

Еквівалентна схема із зосередженими параметрами для розрахунку хвиль у місці комутації показана на рис. 2.29, в. Кожна з ліній у цій схемі замінена своїм хвильовим опором.

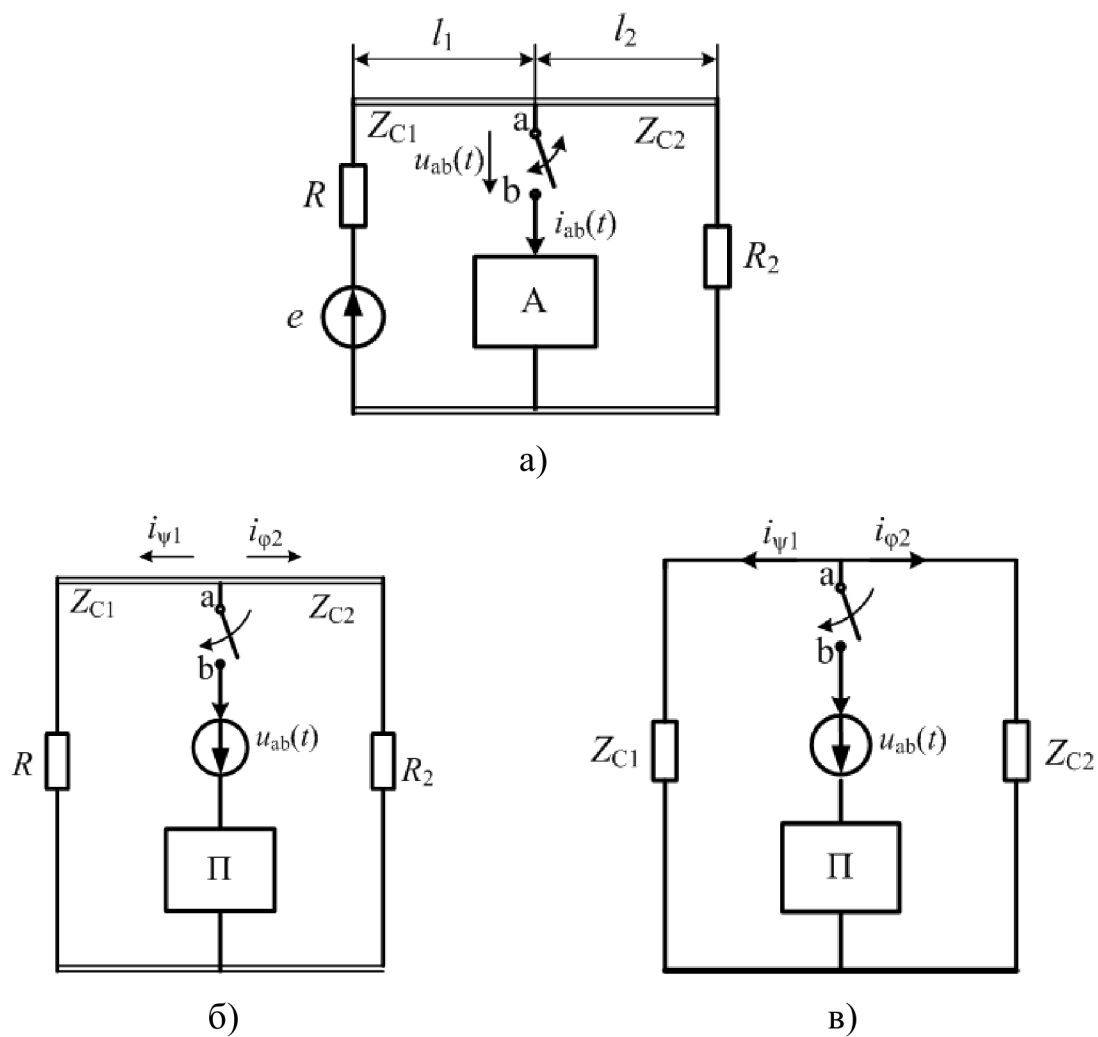


Рис. 2.29

Задача 2.8. Повітряна лінія без втрат довжиною $l = 500$ м з хвильовим опором $Z_c = 200$ Ом живить навантаження $R = 200$ Ом.

Визначити розподіл струму та напруги вздовж ліній через $t_0 = 1$ мкс після ввімкнення незарядженого конденсатора $C = 8,333$ нФ (рис. 2.30, а).

Розв'язання. До комутації струм та напруга у кожній точці лінії та на резисторі R_2 :

$$i_- = \frac{E}{R + R_2} = \frac{1000}{500} = 2 \text{ A}; \quad u_- = i_- R_2 = 2 \cdot 300 = 600 \text{ В.}$$

Напруга на розімкненому ключі (враховуючи, що $u_{c-} = 0$)
 $u_{ab} = U_0 = 600 \text{ В}$. Еквівалентна схема для розрахунку хвиль, що
 виникають у кінці лінії, показана на рис. 2.30, б.

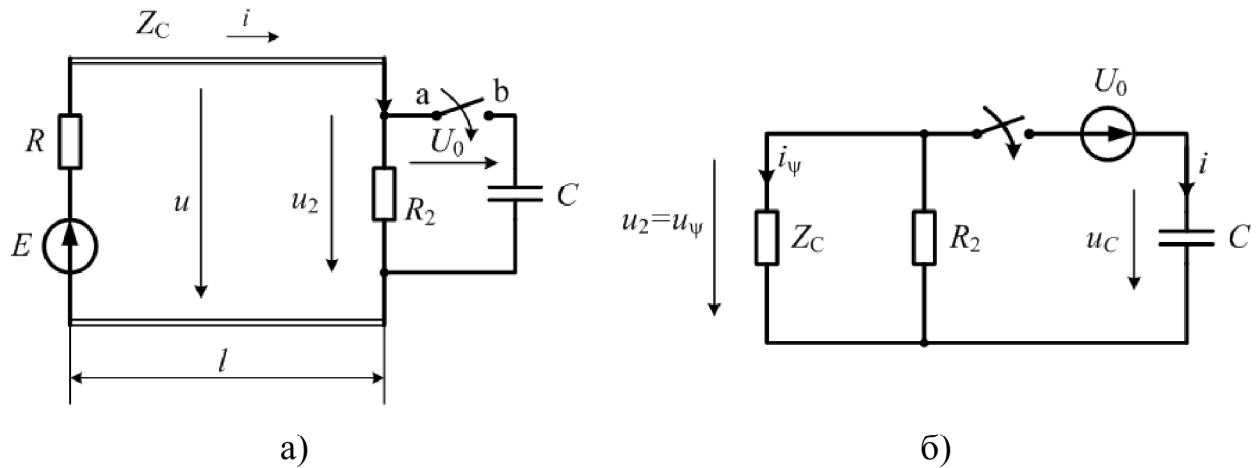


Рис. 2.30

Визначимо перехідний струм класичним методом:

$$i = i_{\text{вим}} + i_{\text{вільн}} = 0 + A e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\text{де } \tau = C \frac{R_2 Z_c}{R_2 + Z_c} = 8,333 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{300 \cdot 200}{500} = 10^{-6} \text{ с};$$

$$A = i(0) = \frac{U_0 (R_2 + Z_c)}{R_2 Z_c} = \frac{600}{120} = 5.$$

Отже, $i = 5e^{-10^6 t}$.

Тепер маємо

$$u_2 = u_{\psi} = -i \frac{R_2 Z_c}{R_2 + Z_c} = -5e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 120 = -600e^{-10^6 t};$$

$$i_{\psi} = -i \frac{R_2}{R_2 + Z_c} = -5e^{-10^6 t} \cdot \frac{300}{200 + 300} = -3e^{-10^6 t}.$$

Зворотні хвилі напруги та струму:

$$u_{\psi}(t, x) = -600e^{-10^6 \left(t - \frac{x}{v} \right)}; \quad i_{\psi}(t, x) = -3e^{-10^6 \left(t - \frac{x}{v} \right)},$$

де t відраховується від моменту ввімкнення ключа; x – від кінця лінії у напрямку до її початку, $v = 3 \cdot 10^8$ м/с.

За час $t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с хвилі пробігають відстань $x_0 = vt_0 = 300$ м, тобто не встигають добігти до початку лінії.

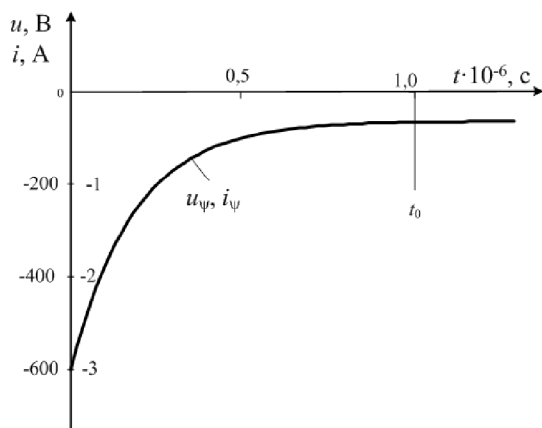


Рис. 2.31

На рис. 2.31 побудовані криві $u_{\psi}(t, 0)$, $i_{\psi}(t, 0)$, а на рис. 2.32 показано розподіл напруги u та струму i вздовж лінії для моменту часу $t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с:

$$u = u_- + u_{\psi}, \quad i = i_- + i_{\psi}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли на схемі на рис. 2.29, a ключ не вмикається, а вимикається. Знову зведемо розрахунок перехідних процесів до нульових податкових умов. Для цього визначимо струм $i_{ab}(t)$, що проходить через замкнений ключ і перейдемо до схеми на рис. 2.33, a , в якій діє лише одне джерело струму, ввімкнене паралельно ключеві.

Напруги та струми, визначені за схемою на рис. 2.33, a , накладаються на напруги та струми, які існували в лінії до комутації.

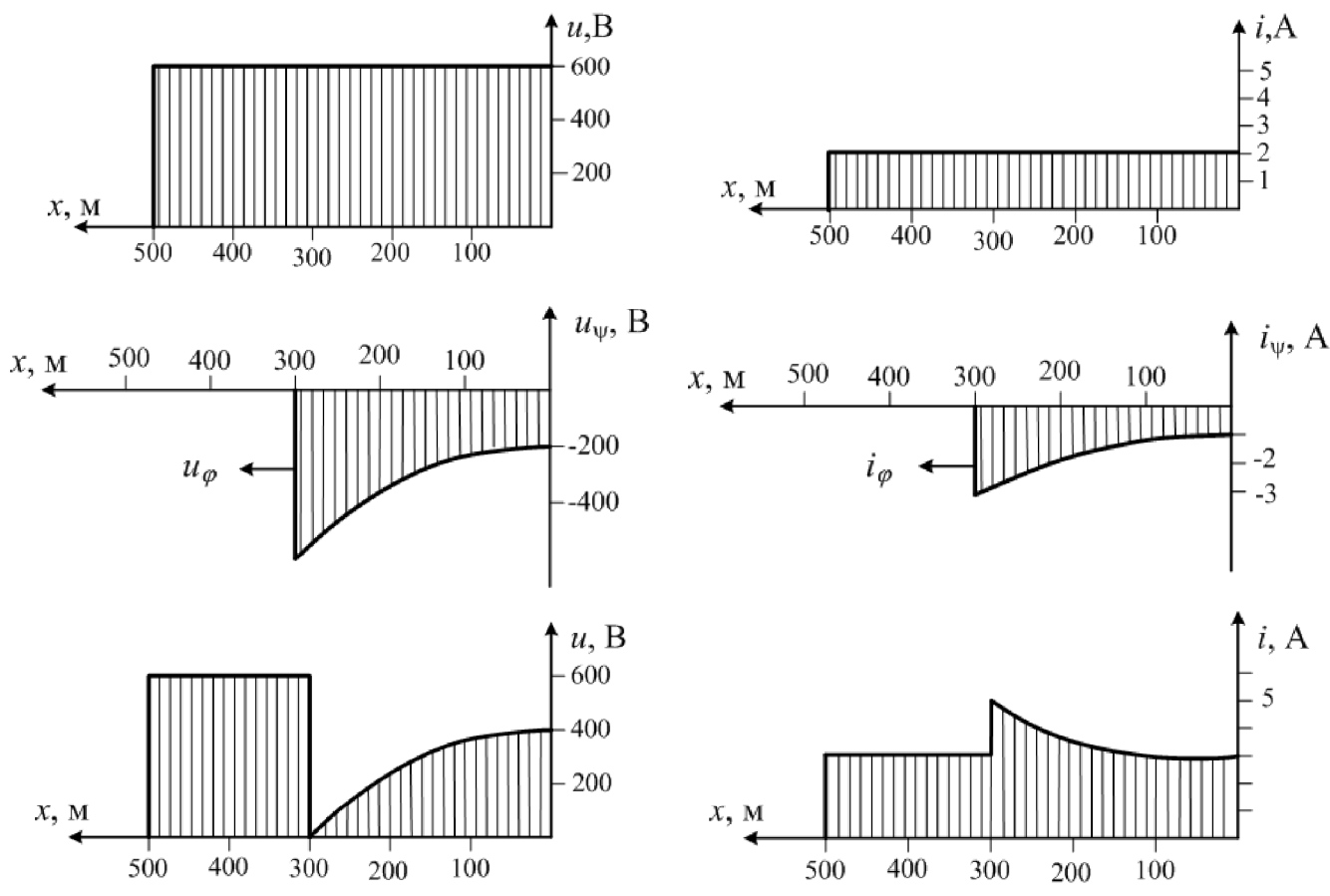
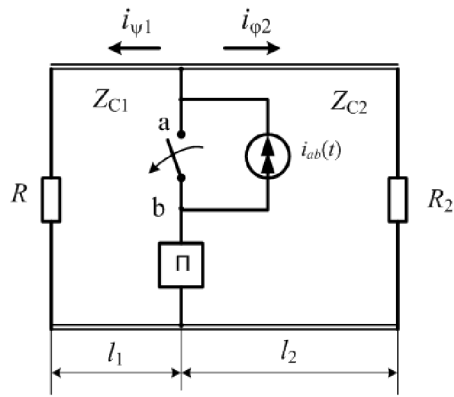


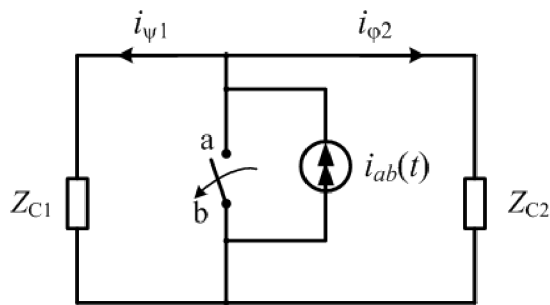
Рис. 2.32

Еквівалентна схема із зосередженими параметрами для розрахунку хвиль у місці комутації показана на рис. 2.33, б. Пасивний двополюсник П на цій схемі не показано, тому що після вимикання ключа він не впливає на струми i_ψ та i_ϕ .

Задача 2.9. Повітряна лінія без втрат довжиною $l = 400$ м і хвильовим опором $Z_c = 800$ Ом використовується для живлення навантаження $R = 500$ Ом від джерела постійної напруги $E = 1000$ В (рис. 2.34, а). Знайти розподіл напруги та струму в лінії через $t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с після вимикання ключа.



а)



б)

Рис. 2.33

Розв'язання. До комутації напруга та струм в кожній точці лінії і на резисторі R_2 :

$$u_- = E = 1000 \text{ В}; \quad i_- = i_{ab} = \frac{E}{R} = I_0 = \frac{1000}{500} = 2 \text{ А.}$$

Для визначення напруги та струму хвиль, що виникають після комутації, розглянемо еквівалентну схему на рис. 2.34, б):

$$i_\psi = I_0 = 2 \text{ А}; \quad u_\psi = Z_c i_\psi = 800 \cdot 2 = 1600 \text{ В.}$$

За час $t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с хвилі пройдуть відстань $x_0 = vt_0 = 300$ м, отже відбитих хвиль не буде.

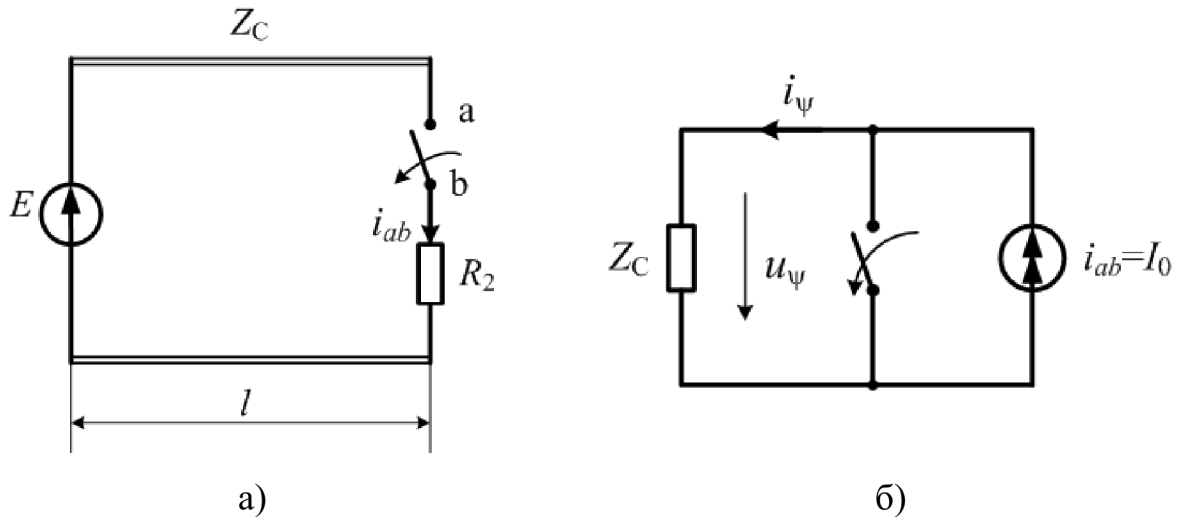


Рис. 2.34

Для визначення напруги та струму хвиль, що виникають після комутації, розглянемо еквівалентну схему на рис. 2.34, б:

$$i_{\psi} = I_0 = 2 \text{ А}; \quad u_{\psi} = Z_c i_{\psi} = 800 \cdot 2 = 1600 \text{ В.}$$

За час $t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с хвилі пройдуть відстань $x_0 = vt_0 = 300$ м, отже відбитих хвиль не буде.

На рис. 2.35 побудовані графіки розподілу напруги та струму в лінії через $t = t_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ с після комутації.

З графіків видно, що вимикання навантаження веде до зростання напруги в лінії, яке тим більше, чим більший хвильовий опір лінії. Вимикання приймачів у повітряних лініях супроводжується значними перенапругами.

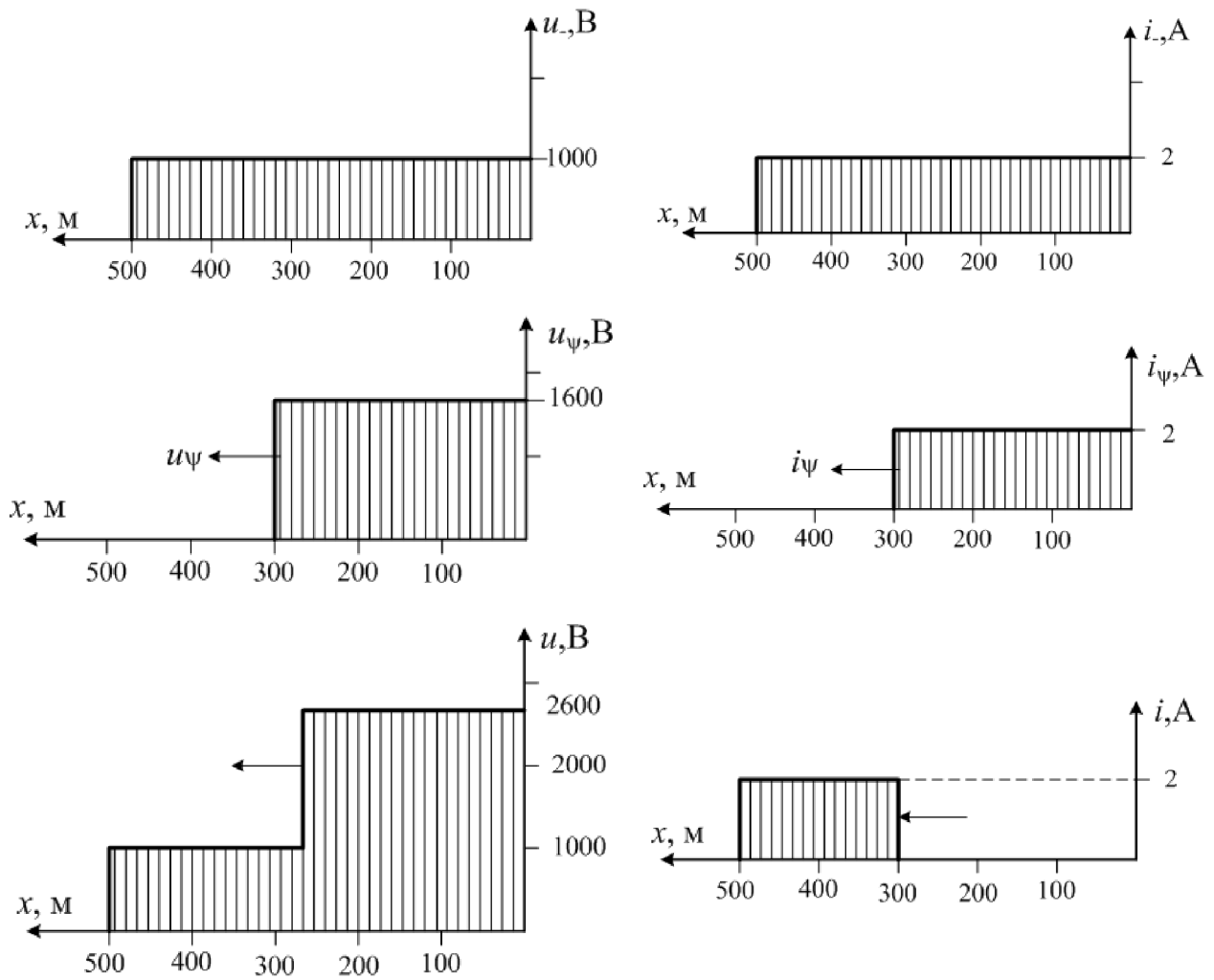


Рис. 2.35

Задача 2.10. До повітряної лінії ($l_1 = 120$ км, $Z_{c1} = 500$ Ом, $v_1 = 3 \cdot 10^5$ км/с), навантаженої на резистор $R_1 = 200$ Ом (рис. 2.36), при $t = 0$ вмикають кабель ($l_2 = 60$ км, $Z_{c2} = 75$ Ом, $v_2 = 1,5 \cdot 10^5$ км/с) з приєднанням на кінці двополюсником ($R_2 = 150$ Ом, $C_2 = 20$ мкФ). Параметри джерела живлення $E = 1200$ В, $R = 100$ Ом.

Побудувати графік розподілу напруги та струму вздовж ліній через $t_0 = 600$ мкс після комутації.

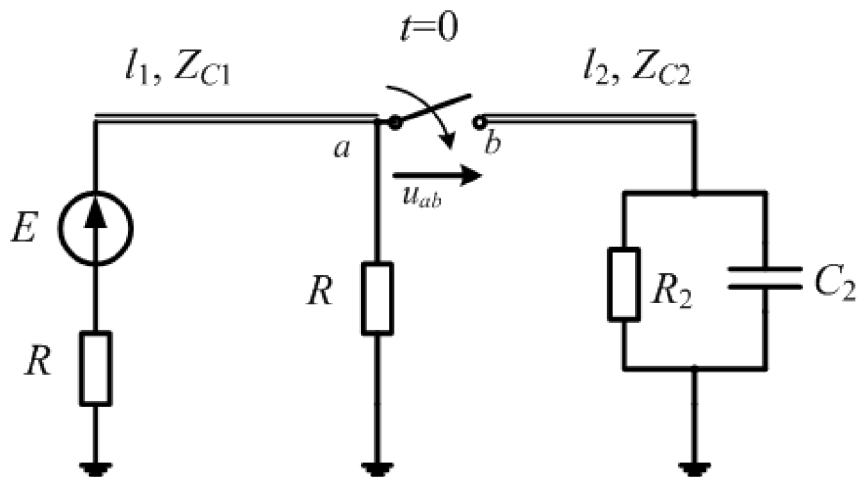


Рис. 2.36

Розв'язання. Напряга та струм в лінії l_1 до комутації

$$i_- = \frac{E}{R + R_1} = \frac{1200}{100 + 200} = 4 \text{ A};$$

$$u_- = R_1 i_- = 4 \cdot 200 = 800 \text{ В.}$$

У лінії l_2 напряга та струм до комутації дорівнюють нулю, тому

$$u_{ab} = R_1 i_- = U_0 = 800 \text{ В.}$$

Еквівалентна схема для розрахунку напруг та струмів хвиль, що виникають у результаті комутації і поширюються в першій лінії від її кінця до початку і в другій лінії – від її початку до кінця, показана на рис. 2.37, а.

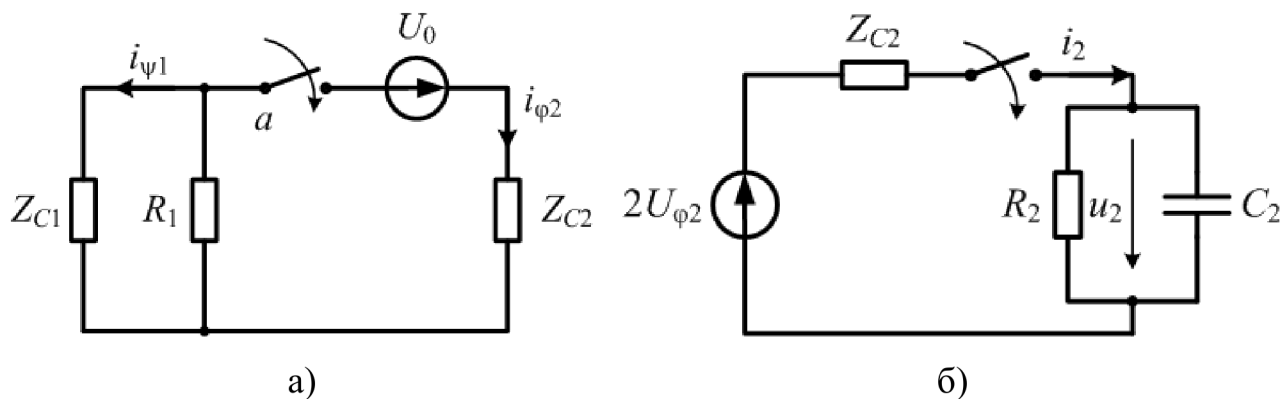


Рис. 2.37

За цією схемою знаходимо:

$$i_{\varphi 2} = \frac{U_0}{Z_{c2} + \frac{Z_{c1}R_1}{Z_{c1} + R_1}} = \frac{800}{75 + \frac{500 \cdot 200}{700}} = 3,672 \text{ А};$$

$$i_{\psi 1} = -i_{\varphi 2} \frac{R_1}{R_1 + Z_{c1}} = -3,672 \cdot \frac{200}{200 + 500} = -1,049 \text{ А};$$

$$u_{\varphi 2} = Z_{c2}i_{\varphi 2} = 75 \cdot 3,672 = 275,4 \text{ В};$$

$$u_{\psi 1} = Z_{c1}i_{\psi 1} = 500(-1,049) = -524,6 \text{ В}.$$

Хвилі мають прямокутну форму.

За $t_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}$ с у першій лінії хвилі пробігають відстань $v_1 t_0 = 3 \cdot 10^5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 180$ км, а в другій лінії $v_2 t_0 = 1,5 \cdot 10^5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3} = 90$ км.

Отже, хвилі в першій лінії встигають відбитись від її початку і пробігти 60 км у напрямку до кінця. Хвилі у другій лінії, відбившись від її кінця, пробігають 30 км у напрямку до початку цієї лінії.

Коефіцієнт відбиття від початку першої лінії:

$$n_1 = \frac{R - Z_{c1}}{R + Z_{c1}} = \frac{100 - 500}{100 + 500} = -0,6667.$$

Відбиті хвилі в першій лінії (прямі):

$$i_{\varphi 1} = n_1 i_{\psi 1} = -0,6667(-1,049) = 0,6993 \text{ А};$$

$$u_{\varphi 1} = n_1 u_{\psi 1} = -0,6667(-524,6) = 349,9 \text{ В}.$$

Для розрахунку хвиль, відбитих від кінця другої лінії, розглядаємо еквівалентну схему, показану на рис. 2.37, б.

Застосувавши класичний або операторний метод розрахунку перехідних процесів, дістанемо

$$u_2 = 2u_{\varphi 2} \frac{R_2}{R_2 + Z_{c2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (2.42)$$

де $\tau = C_2 \frac{R_2 Z_{c2}}{R_2 + Z_{c2}} = 10^{-4} \text{ с} = 100 \text{ мкс}$.

Підставивши в (2.42) числові значення, матимемо

$$u_2 = 2 \cdot 275,4 \frac{150}{150 + 75} \left(1 - e^{-10^4 t} \right) = 367,2 \left(1 - e^{-10^4 t} \right). \quad (2.43)$$

Напруга відбитої хвилі в кінці другої лінії

$$u_{\psi 2} = u_2 - u_{\varphi 2} = 367,2 \left(1 - e^{-10^4 t} \right) - 275,4 = 91,8 - 367,2 e^{-10^4 t}. \quad (2.44)$$

Струм відбитої хвилі в кінці другої лінії

$$i_{\psi 2} = \frac{u_{\psi 2}}{Z_{c2}} = 1,224 - 4,896 e^{-10^4 t}. \quad (2.45)$$

Напруга та струм відбитих від кінця другої лінії хвиль для моменту часу $t_0 = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ після комутації

$$u_{\psi 2} = 91,8 - 367,2 e^{-10^4 \left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{180-x}{v_2} \right)}; \quad (2.46)$$

$$i_{\psi 2} = 1,224 - 4,896 e^{-10^4 \left(0,2 \cdot 10^{-3} - \frac{180-x}{v_2} \right)}; \quad (2.47)$$

$$150 \text{ км} \leq x \leq 180 \text{ км}.$$

Вирази (2.46), (2.47) отримали, виходячи з того, що у (2.42)–(2.45) час t відраховується від моменту набігання хвиль $u_{\varphi 2}$ і $i_{\varphi 2}$ на кінець другої лінії, а не від моменту комутації ключа. Координата x відраховується від початку першої лінії.

Накладаючи напруги (струми) прямих та зворотних хвиль на докомутаційні напруги (струми) у кожній лінії, дістаємо розподіл результуючих напруг (струмів) у лініях:

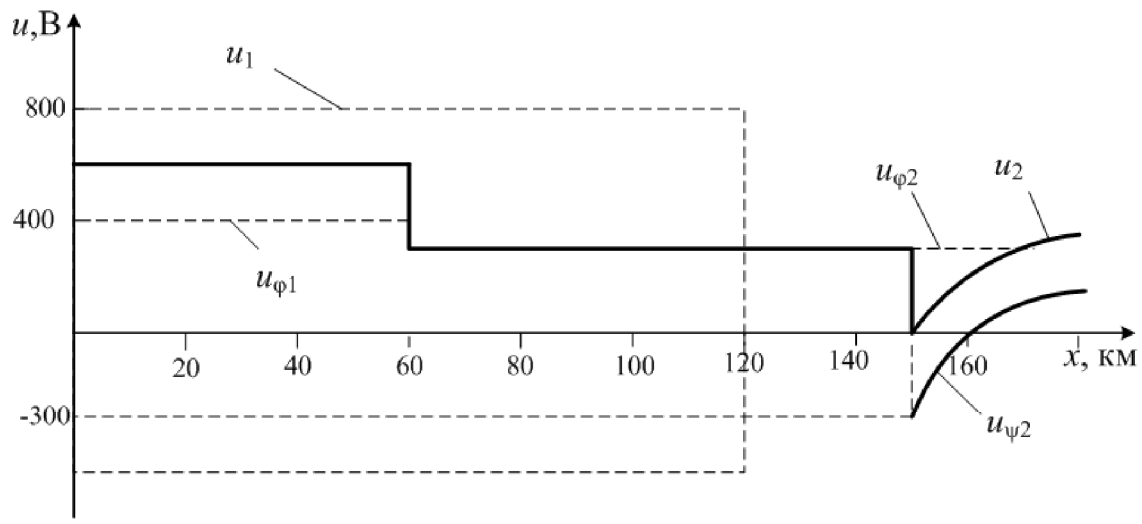
для першої лінії

$$u = u_- + u_{\psi 1} + u_{\phi 1}; \quad i = i_- - i_{\psi 1} + i_{\phi 1};$$

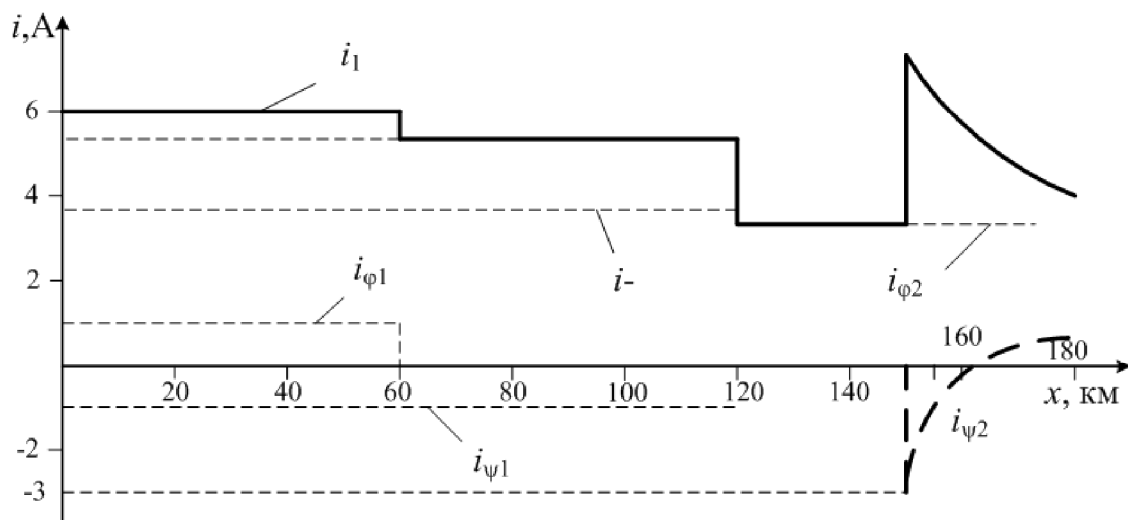
для другої лінії

$$u = u_{\phi 2} + u_{\psi 2}; \quad i = i_{\phi 2} - i_{\psi 2}.$$

На рис. 2.38 побудовано графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній через $t_0 = 0,6 \cdot 10^{-3}$ с після комутації.



а)



б)

Рис. 2.38

Задача 2.11. Джерело постійної напруги $E_0 = 2400$ В живить повітряну лінію ($l_1 = 60$ км, $Z_{c1} = 800$ Ом, $v_1 = 3 \cdot 10^8$ км/с) з активно-індуктивним навантаженням ($R_1 = 400$ Ом, $L_1 = 120$ мГн) та з'єднану з нею кабельну лінію ($l_2 = 40$ км, $Z_{c2} = 50$ Ом, $v_2 = 1,5 \cdot 10^8$ км/с) з активним навантаженням ($R_2 = 600$ Ом). Знайти розподіл напруги та струму вздовж ліній через $t_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ с після вимикання кабеля (рис. 2.39).

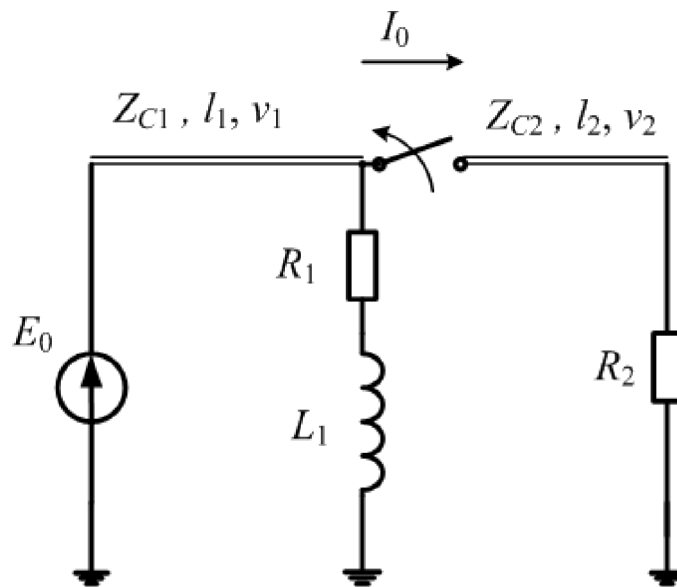


Рис. 2.39

Розв'язання. Напруга та струм в лінії l_1 до комутації:

$$u'_- = E_0 = 2400 \text{ В}; \quad i'_- = \frac{E_0}{R_1 R_2 / (R_1 + R_2)} = \frac{2400}{400 \cdot 600 / 1000} = 10 \text{ А.}$$

Напруга та струм в лінії l_2 до комутації:

$$u''_- = E_0 = 2400 \text{ В}; \quad i''_- = \frac{E_0}{R_2} = \frac{2400}{600} = 4 \text{ А.}$$

Через ключ протікає струм $I_0 = i''_- = 4$ А.

Напруги та струми, які виникають після комутації, визначимо за еквівалентною схемою, показаною на рис. 2.40:

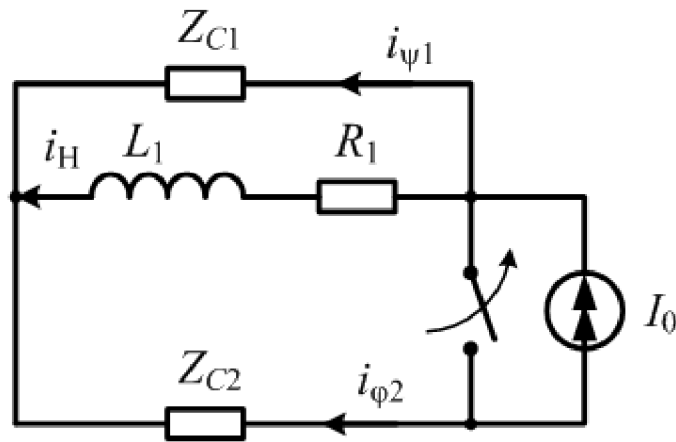


Рис. 2.40

$$i_{\phi 2} = -I_0 = -4 \text{ A};$$

$$u_{\phi 2} = Z_{c2} I_{\phi 2} = 50(-4) = -200 \text{ В};$$

$$i_H = I_0 \frac{Z_{c1}}{Z_{c1} + R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 4 \cdot \frac{800}{1200} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 3 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$\text{де } \tau = \frac{L_1}{R_1 + Z_{c1}} = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{1200} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$i_{\psi 1} = I_0 - i_H = 4 - 3 + 3e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + 3e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ А};$$

$$u_{\psi 1} = Z_{c1} i_{\psi 1} = 800 \left(1 + 3e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 800 + 2400e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ В}.$$

За $t_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ с хвилі в першій лінії пробігають відстань $v_1 t_0 = 90$ км, а в другій $v_2 t_0 = 45$ км. Отже, кожна з цих хвиль встигає відбитись і пробігти відповідно 30 і 5 км у протилежному напрямку.

Для розрахунку відбитих хвиль знаходимо коефіцієнти відбиття:

$$n_1 = -1; \quad n_2 = \frac{R_2 - Z_{c2}}{R_2 + Z_{c2}} = \frac{600 - 50}{600 + 50} = 0,846.$$

Відбиті від початку першої лінії хвилі:

$$u_{\varphi 1} = n_1 u_{\psi 1} = - \left(800 + 2400 e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad (2.48)$$

$$i_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}}{Z_{c1}} = - \left(1 + 3 e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (2.49)$$

Відбиті від кінця другої лінії хвилі:

$$u_{\psi 2} = n_2 u_{\varphi 2} = 0,846(-200) = -169,2 \text{ В}; \quad (2.50)$$

$$i_{\psi 2} = \frac{u_{\psi 2}}{Z_{c2}} = -\frac{169,2}{50} = -3,384 \text{ А}. \quad (2.51)$$

У (2.48)–(2.51) час t відраховують від моменту, коли кожна з хвиль ψ_1 та ψ_2 досягає відповідного кінця лінії.

Для моменту $t_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ с після комутації розподіл напруги та струму в лініях визначається формулами, в яких координата x відраховується від початку першої лінії:

1) при $0 \leq x < 30$ км:

$$\begin{aligned} u(x) &= u'_- + u_{\psi 1} + u_{\varphi 1} = \\ &= 2400 + 2400 e^{-10^4 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5} \right)} - 2400 e^{-10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{3 \cdot 10^5} \right)}; \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} i(x) &= i'_- - i_{\psi 1} + i_{\varphi 1} = \\ &= 8 - 3 e^{-10^4 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5} \right)} - 3 e^{-10^4 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x}{3 \cdot 10^5} \right)}; \end{aligned} \quad (2.53)$$

2) при $30 \text{ км} \leq x < 60 \text{ км}$:

$$u(x) = u'_- + u_{\psi 1} = 3200 + 2400e^{-10^4 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5} \right)}; \quad (2.54)$$

$$i(x) = i'_- - i_{\psi 1} = 9 - 3e^{-10^4 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5} \right)};$$

3) при $60 \text{ км} \leq x < 95 \text{ км}$:

$$u(x) = u''_- + u_{\varphi 2} = 2400 - 200 = 2200 \text{ В}; \quad (2.55)$$

$$i(x) = i''_- - i_{\varphi 2} = 4 - 4 = 0;$$

4) при $95 \text{ км} \leq x \leq 100 \text{ км}$:

$$u(x) = u''_- + u_{\varphi 2} + u_{\psi 2} = 2400 - 200 - 169,2 = 2030,8 \text{ В}; \quad (2.56)$$

$$i(x) = i''_- - i_{\varphi 2} - i_{\psi 2} = 4 - 4 + 3,384 = 3,384.$$

На рис. 2.41 за (2.52–2.56) побудовано відповідні графіки.

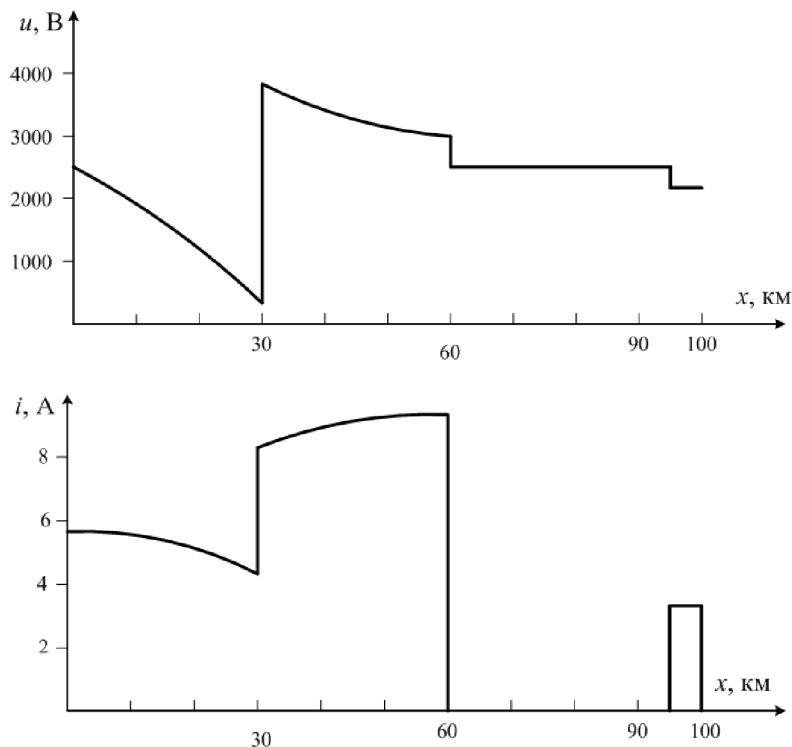


Рис. 2.41

2.4. Перехідні процеси при багаторазових відбиттях хвиль від кінців лінії

Багаторазові відбиття хвиль від кінців лінії скінченної довжини використовуються для формування імпульсних коливань, параметри яких можна регулювати, змінюючи довжину лінії та граничні умови.

Розглянемо вмикання лінії довжиною l з хвильним опором Z_c , замкненої на резистор R_2 , до джерела постійної напруги E із внутрішнім опором R_1 . При $t = 0$ в лінії виникає перша пряма хвиля, напруга якої

$$u_{\phi 1} = E \frac{Z_c}{Z_c + R_1}.$$

Час пробігу хвилею відстані l становить l/v , де v – швидкість хвилі в лінії.

Дійшовши до кінця лінії, перша пряма хвиля відбивається. Коефіцієнт відбиття в кінці лінії

$$n_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}.$$

У свою чергу, перша зворотна хвиля, дійшовши до початку лінії, також відбивається. Коефіцієнт відбиття на початку лінії

$$n_1 = \frac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c}.$$

Процес відбиття хвилі від початку та кінця лінії повторюється періодично через проміжок часу l/v .

Запишемо вирази для напруг прямих та зворотних хвиль, нумеруючи їх по чергово числами натурального ряду:

$$u_{\varphi 1} = E \frac{Z_c}{Z_c + R_1}; \quad u_{\psi 1} = n_2 u_{\varphi 1};$$

$$u_{\varphi 2} = n_1 u_{\psi 1} = n_1 n_2 u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 2} = n_2 u_{\varphi 2} = n_2 (n_1 n_2) u_{\varphi 1};$$

$$u_{\varphi 3} = n_1 u_{\psi 2} = (n_1 n_2)^2 u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 3} = n_2 u_{\varphi 3} = n_2 (n_1 n_2)^2 u_{\varphi 1};$$

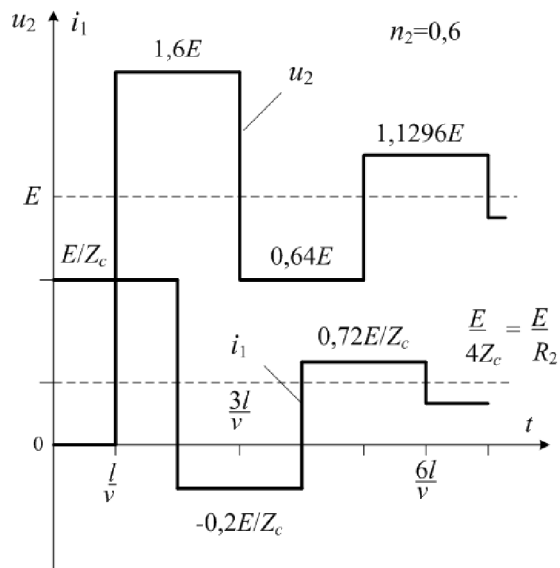
.....

$$u_{\varphi k} = (n_1 n_2)^{k-1} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi k} = n_2 (n_1 n_2)^{k-1} u_{\varphi 1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

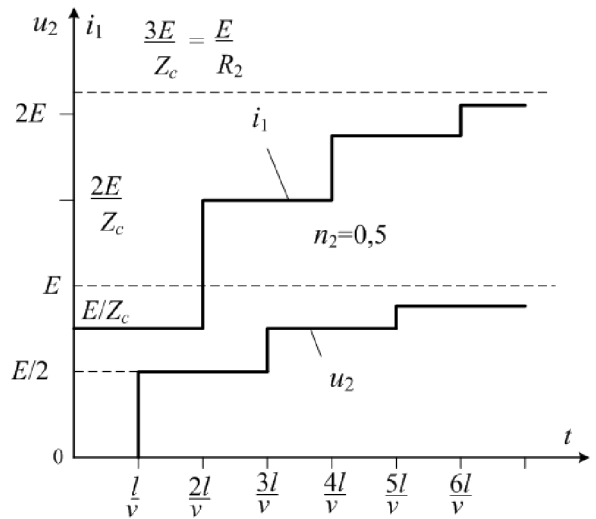
Накладання цих хвиль дає значення напруг (струмів) у будь-якій точці лінії у будь-який момент часу. В кінці та на початку лінії хвилі накладаються через проміжок $2l/v$.

На рис. 2.42, *a* показані залежності напруги u_2 на кінці лінії та струму i_1 на початку лінії від часу у разі випадку, коли $R_2 = 4Z_c$, $R_1 = 0$, тобто $n_1 = -1$, $n_2 = 0,6$. На рис. 2.42, *б* показані криві $u_2(t)$ та $i_1(t)$ у разі, коли $R_2 = Z_c/3$, $R_1 = 0$, тобто $n_1 = -1$, $n_2 = -0,5$. Із графіків на рис. 2.42 видно, що при $R_2 < Z_c$ характер наростання напруги u_2 та струму i_1 до певних усталених значень носить аперіодичний характер.

При $R_2 > Z_c$ напруга u_2 та струм i_1 здійснюють коливання навколо усталених значень. При $R_2 = \infty$, тобто при $n_2 = 1$, коливання не загасають, як це можна бачити з рис. 2.43. Подібна система використовується як генератор прямокутних імпульсів малої тривалості.



а)



б)

Рис. 2.42

Величину $T = 4l/v$ називають *періодом власних коливань лінії*.

Практично ці коливання загасають, тому що завжди $R_1 > 0$, тобто $|n_1| < 1$.

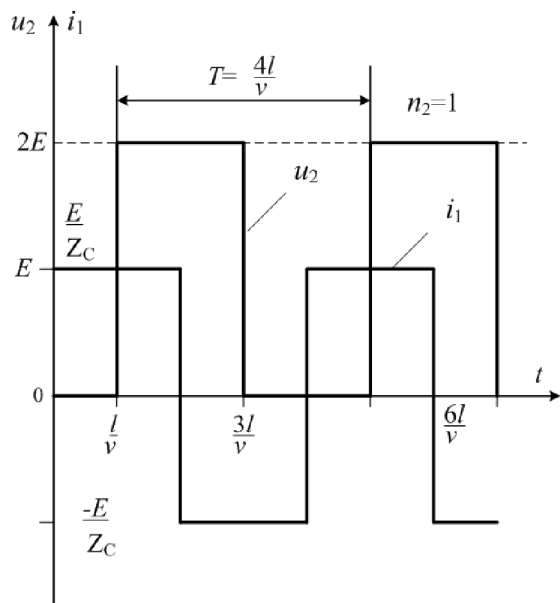


Рис. 2.43

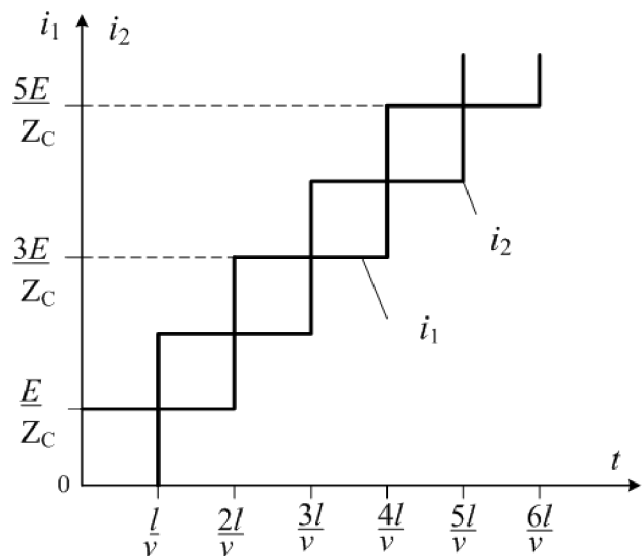


Рис. 2.44

Якщо при $R_1 = 0$ вмикається короткозамкнена лінія ($R_2 = 0$), то $n_1 = -1$, $n_2 = -1$ і струм на початку і в кінці лінії через кожний інтервал часу $2l/v$ наростає на величину $2E/Z_c$ (рис. 2.44).

За наявності втрат стрибки струму поступово зменшуються і він досягає певного граничного значення – струму короткого замикання лінії.

Зазначимо, що теоретично незгасаючі коливання спостерігаються також при ввімкненні до джерела постійної напруги лінії без втрат з реактивним двополюсником на кінці. Період і форма цих коливань також визначаються багаторазовими відбиттями прямих та зворотних хвиль.

Якщо опір навантаження дорівнює характеристичному опору лінії ($R_2 = Z_c$), то пряма хвиля, добігши за час $t_0 = l/v$ до кінця лінії, не відбивається. Це означає, що перехідний процес закінчується за час одноразового проходження хвилі вздовж лінії і сигнал на навантаженні повністю повторює форму вхідного сигналу, запізнюючись на час $t_0 = l/v$. Саме в такому режимі працюють різноманітні лінії затримки, які використовуються в системах обробки імпульсних сигналів.

Розряд лінії через резистивний елемент

Розглянемо перехідний процес, що виникає після ввімкнення на одному з кінців лінії довжиною l , попередньо зарядженої до напруги U_0 , резистивного навантаження, опір якого дорівнює R (рис. 2.45).

Напруга на ключі до комутації: $u_{ab} = U_0$.

Струм $i_{\psi 1}$ та напругу $u_{\psi 1}$ хвиль, що поширюються від кінця лінії, знаходимо за еквівалентною схемою, показаною на рис. 2.45, б:

$$i_{\psi 1} = -\frac{U_0}{Z_c + R} = -I; \quad u_{\psi 1} = Z_c i_{\psi 1} = -U_0 \frac{Z_c}{Z_c + R}.$$

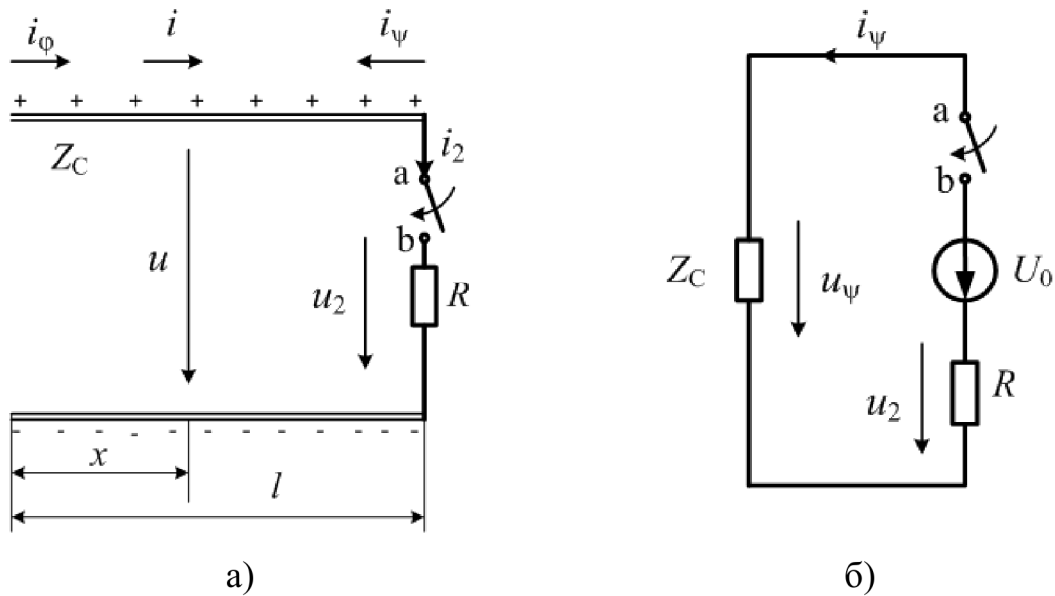


Рис. 2.45

Відбиті від кінців лінії хвилі обчислюємо за допомогою коефіцієнта відбиття:

$$n_1 = 1; \quad n_2 = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}.$$

Перша відбита від початку лінії хвиля (пряма):

$$i_{\phi 1} = n_1 i_{\psi 1} = -1.$$

Далі дістаємо:

$$i_{\psi 2} = n_2 i_{\phi 1} = -n_2 I;$$

$$i_{\phi 2} = i_{\psi 2}; \quad i_{\psi 3} = n_2 i_{\phi 2} = n_2^2 i_{\phi 1} = -n_2^2 I;$$

.....

$$i_{\phi k} = i_{\psi k}; \quad i_{\psi k} = -n_2^{k-1} I, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Кожна відбита від початку лінії хвиля струму (i_ϕ) дорівнює попередній падаючій хвилі (i_ψ) і тому повністю її компенсує при набіганні на кінець лінії. Отже, струм хвиль, що послідовно накладаються одна на одну в кінці лінії, завжди дорівнює струму останньої зворотної (відбитої від кінця) хвилі.

Струм i_2 у резисторі R та струм зворотної хвилі у кінці лінії відрізняються лише знаками:

$$i_2 = -i_{\psi k} = n_2^{k-1} I = n_2^{k-1} \frac{U_0}{Z_c + R}; \quad (2.57)$$

$$u_2 = Ri_2 = n_2^{k-1} RI = n_2^{k-1} U_0 \frac{R}{Z_c + R}. \quad (2.58)$$

Використовуючи (2.57), (2.58), для послідовних значень $k = 1, 2, 3, \dots$ знаходимо значення струму та напруги споживача R через послідовні інтервали часу $t_0 = 2l/v$.

На рис. 2.46, *а*, *б* зображені залежності $u_2(t)$ (в іншому масштабі $i_2(t)$) для таких співвідношень між R і Z_c :

$$а) R > Z_c \left(R = 3Z_c; \quad n_2 = 0,5; \quad \frac{R}{Z_c + R} = \frac{3}{4} \right);$$

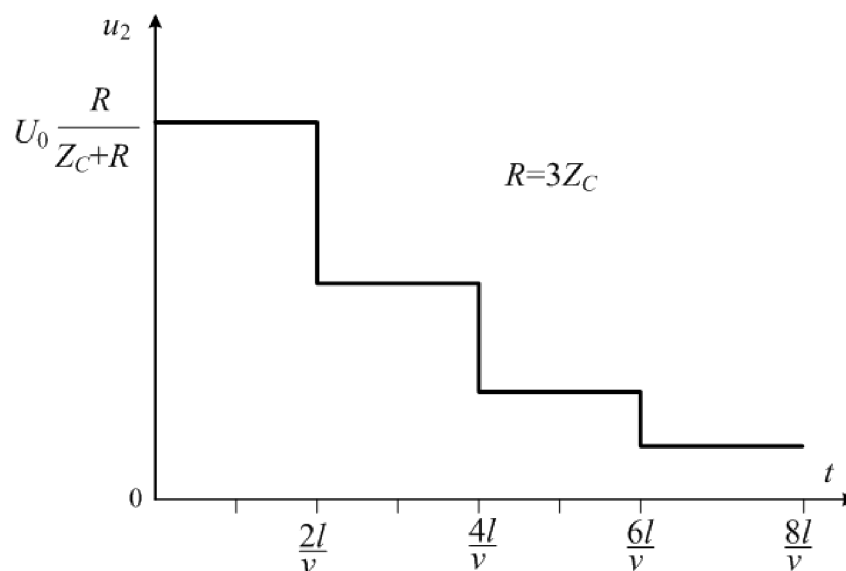
$$б) R < Z_c \left(R = \frac{1}{3}Z_c; \quad n_2 = -0,5; \quad \frac{R}{Z_c + R} = \frac{1}{4} \right).$$

При $R > Z_c$ напруга та струм спадають стрибком через кожні $2l/v$ без зміни знака. При $R < Z_c$ спад напруги та струму супроводжується періодичною зміною їх знаків. Фізична картина процесів нагадує аперіодичний та, відповідно, коливальний розряди конденсатора.

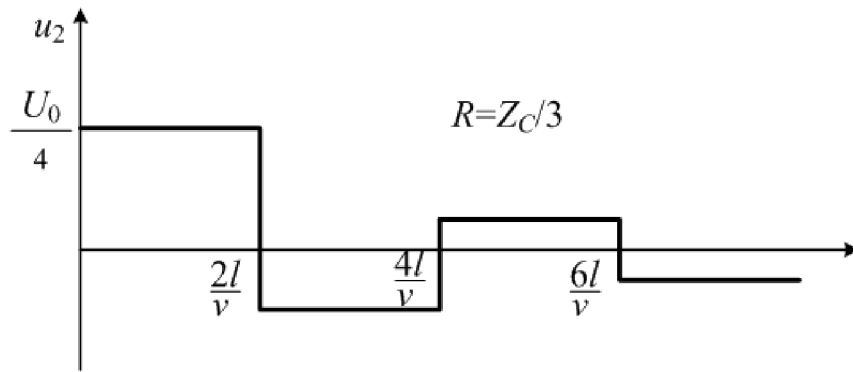
Розглянемо так званий узгоджений розряд лінії, коли $R = Z_c$, $n_2 = 0$, $R/(Z_c + R) = 1/2$.

У цьому разі перша зворотна хвиля знімає з лінії половину напруги, а перша відбита від початку хвиля — другу половину і перехідний процес закінчується через $t_0 = 2l/v$ (рис. 2.46, в). Скінченна тривалість перехідного процесу є принциповою особливістю узгодженого розряду лінії.

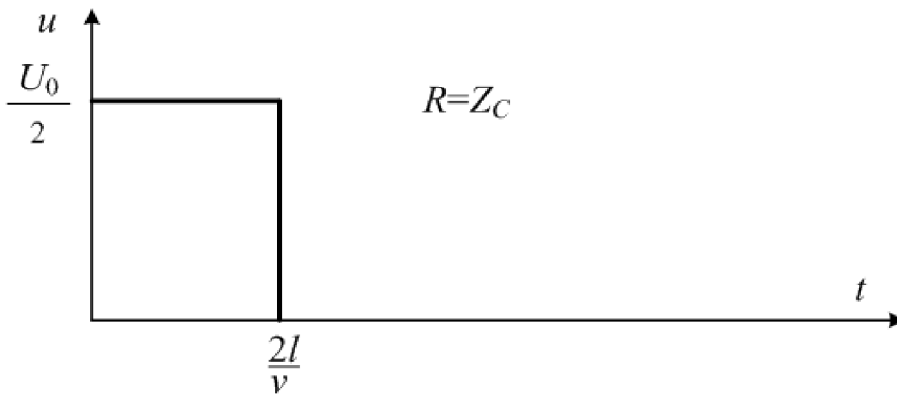
Узгоджений розряд лінії використовується для імпульсної модуляції високочастотних радіолокаційних сигналів. Імпульсний модулятор складається з лінії (зазвичай береться її LC - еквівалент), навантаженої на генератор НВЧ - коливач, високовольтного джерела постійної напруги та комутатора (ключа). Спочатку лінія заряджається від високовольтного джерела до напруги в декілька десятків кіловольт, а потім через комутатор розряджається на генератор НВЧ-коливач (магнетрон). При цьому формується майже прямокутний імпульс мікросекундної тривалості, потужність якого становить сотні кіловат.



a)



б)



в)

Рис. 2.46

2.5. Загальний метод розрахунку перехідних процесів у лініях скінченної довжини та приклади його використання

Основний недолік методу розрахунку перехідних процесів, пов'язаний необхідністю багаторазових додавань прямих та зворотних хвиль у випадку їх багаторазових відбиттів від кінців лінії скінченної довжини.

Інколи доцільніше розглядати лише результуючі значення напруги та струму в лінії з урахуванням граничних умов на кінцях лінії при

розв'язанні диференціальних рівнянь. Такий підхід спрощує розрахунок при багаторазових відбиттях хвиль.

Для ілюстрації звернемося знову до задачі розряду лінії через резистивний елемент (див. рис. 2.24).

Виходимо безпосередньо з рівнянь (2.3) які дають зв'язок між операторними зображеннями напруги та струму в лінії.

Враховуючи початкові умови поставленої задачі: $u(0, x) = U_0$, $i(0, x) = 0$, рівняння (2.3) запишемо у вигляді

$$-\frac{dU(p, x)}{dx} = pL_0 I(p, x); \quad (2.59)$$

$$-\frac{dI(p, x)}{dx} = pC_0 U(p, x) - C_0 U_0. \quad (2.60)$$

Об'єднуючи (2.59), (2.60) отримаємо:

$$\frac{d^2 U(p, x)}{dx^2} - \frac{p^2}{v^2} U(p, x) = \frac{p}{v^2} U_0; \quad (2.61)$$

$$\frac{d^2 I(p, x)}{dx^2} = \frac{p^2}{v^2} I(p, x). \quad (2.62)$$

Окремий розв'язок рівняння (2.61) є:

$$U'(p, x) = \frac{U_0}{p}. \quad (2.63)$$

Це легко довести прямою підстановкою (2.63) в (2.61).

Отже, загальний розв'язок (2.61):

$$U(p, x) = \frac{U_0}{p} + A(p)e^{-p\frac{x}{v}} + B(p)e^{p\frac{x}{v}}. \quad (2.64)$$

З (2.59) маємо

$$I(p, x) = \frac{1}{Z_c} \left[A(p) e^{-p \frac{x}{v}} + B(p) e^{p \frac{x}{v}} \right], \quad (2.65)$$

де $Z_c = L_0 \cdot v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ — хвильовий опір лінії.

Граничні умови:

$$1) I(p, x) = 0; \quad (2.66)$$

$$2) U(p, l) = RI(p, l). \quad (2.67)$$

Підставляючи $x = l$ у (2.64), (2.65) та $x = 0$ у (2.65), дістанемо

$$\frac{R}{Z_c} \left[A(p) e^{-p \frac{l}{v}} - B(p) e^{p \frac{l}{v}} \right] = \frac{U_0}{p} + A(p) e^{-p \frac{l}{v}} + B(p) e^{p \frac{l}{v}}; \quad (2.68)$$

$$0 = A(p) - B(p). \quad (2.69)$$

Розв'язуючи (2.68), (2.69) відносно $A(p)$ і $B(p)$, матимемо

$$A(p) = B(p) = \frac{-\frac{U_0}{p}}{\left(1 - \frac{R}{Z_c}\right) e^{-p \frac{l}{v}} + \left(1 + \frac{R}{Z_c}\right) e^{p \frac{l}{v}}}. \quad (2.70)$$

Отже, операторні зображення напруги та струму в лінії:

$$\begin{aligned} U(p, x) &= \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p} \frac{e^{-p \frac{x}{v}} + e^{p \frac{x}{v}}}{\left(1 - \frac{R}{Z_c}\right) e^{-p \frac{l}{v}} + \left(1 + \frac{R}{Z_c}\right) e^{p \frac{l}{v}}} = \\ &= \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p} \frac{Z_c}{Z_c + R} \frac{e^{-p \frac{x+l}{v}} + e^{-p \frac{l-x}{v}}}{1 - n_2 e^{-p \frac{2l}{v}}}; \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$I(p, x) = -\frac{U_0}{p} \frac{1}{Z_c + R} \frac{e^{-p\frac{x+l}{v}} - e^{-p\frac{l-x}{v}}}{1 - n_2 e^{-p\frac{2l}{v}}}, \quad (2.72)$$

де $n_2 = \frac{R - Z_c}{R + Z_c}$ — коефіцієнт відбиття в кінці лінії.

Певні труднощі викликає знаходження оригіналів за операторними зображеннями, тому що вони – трансцендентні функції.

Найбільш наочні результати здобудемо, розкладаючи трансцендентні зображення в ряд (метод Даламбера). Покажемо, як це робиться, знаходячи напругу в кінці лінії за виразом (2.71):

$$U(p, l) = \frac{U_0}{p} - \frac{kU_0}{p} \frac{1 + e^{-p\frac{2l}{v}}}{1 - n_2 e^{-p\frac{2l}{v}}}, \quad \text{де } k = \frac{Z_c}{Z_c + R}. \quad (2.73)$$

Помітимо, що в правій напівплощині комплексної змінної p , яка відповідає значенням $t > 0$, модуль величини $e^{-p\frac{2l}{v}}$ не перевищує одиниці, модуль n_2 також менший одиниці. Тоді за аналогією зі степеневим рядом (геометрична прогресія) $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$, який сходиться

при $|x| < 1$, можемо записати

$$\frac{1}{1 - n_2 e^{-p\frac{2l}{v}}} = 1 + n_2 e^{-p\frac{2l}{v}} + n_2^2 e^{-p\frac{4l}{v}} + n_2^3 e^{-p\frac{6l}{v}} + \dots$$

Тепер (2.73) зводиться до вигляду

$$U(p,l) = \frac{U_0(1-k)}{p} - \frac{U_0k(1+n_2)}{p} =$$

$$= \left(e^{-p\frac{2l}{v}} + n_2 e^{-p\frac{4l}{v}} + n_2^2 e^{-p\frac{6l}{v}} + \dots \right).$$

Оригінал, що відповідає вищенаведеному операторному зображенню:

$$u_2 = u(t,l) = U_0(1-k)1(t) - U_0k(1+n_2) \left[1\left(t - \frac{2l}{v}\right) + n_2 1\left(t - \frac{4l}{v}\right) + \right.$$

$$\left. + n_2^2 1\left(t - \frac{6l}{v}\right) + \dots \right].$$

Останній вираз містить суму зсунутих східчастих функцій. Для різних співвідношень між Z_c і R криві $u_2 = u(t,l)$ побудовано на рис. 2.46.

Задача 2.12. До лінії без втрат (довжина l , хвильовий опір Z_c , швидкість поширення хвилі v), розімкненої на кінці, в момент $t = 0$ приєднується конденсатор C , заряджений до напруги U_0 (рис. 2.47). Визначити напругу $u(t,x)$ та струм $i(t,x)$ в лінії.

Розв'язання. Застосуємо операторний метод розрахунку перехідних процесів у лінії. Граничні умови на кінцях лінії:

$$1) x = l, I(p,l) = I_2(p) = 0;$$

$$2) x = 0, i_1 = -C \frac{du_1}{dt}, \text{ тобто } I_1(p) = -C [pU_1(p) - u_1(0)].$$

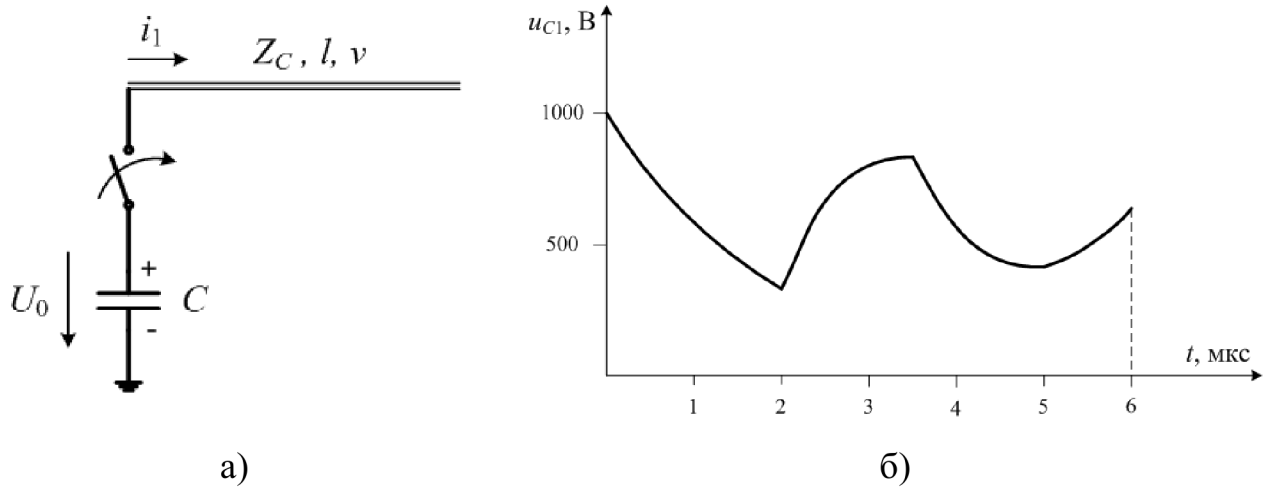


Рис. 2.47

Враховуючи, що $u_1(0) = U_0$, дістанемо

$$I_1(p) = -pCU_1(p) + CU_0. \quad (2.74)$$

Скористаємося операторними зображеннями напруги та струму в лінії для будь-якого x :

$$U(p, x) = U_2(p)ch\gamma(l-x) + I_2(p)Z_c(p)sh\gamma(l-x);$$

$$I(p, x) = \frac{U_2(p)}{Z_c(p)}sh\gamma(l-x) + I_2(p)ch\gamma(l-x). \quad (2.75)$$

Згідно з граничною умовою при $x = l$, рівняння (2.75) набувають вигляду:

$$U(p, x) = U_2(p)ch\gamma(l-x); \quad (2.76)$$

$$I(p, x) = \frac{U_2(p)}{Z_c}sh\gamma(l-x). \quad (2.77)$$

Беручи у (2.76), (2.77) $x = 0$, матимемо

$$U_1(p) = U_2(p)ch\gamma l; \quad (2.78)$$

$$I_1(p) = \frac{U_2(p)}{Z_c} sh\gamma l. \quad (2.79)$$

Вирази (2.74), (2.78), (2.79) дозволяють записати (2.76), (2.77) так:

$$U(p, x) = U_0 \frac{ch\gamma(l-x)}{pch\gamma l + ash\gamma l}; \quad (2.80)$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{Z_c} \frac{sh\gamma(l-x)}{pch\gamma l + ash\gamma l}. \quad (2.81)$$

Для лінії без втрат $Z_c(p) = Z_c$, $\gamma(p) = p\sqrt{L_0 C_0} = \frac{p}{v}$.

Позначимо: $t_0 = \frac{l}{v}$, $a = \frac{1}{Z_c C}$.

Остаточно маємо:

$$U(p, x) = U_0 \frac{chp\left(t_0 - \frac{x}{v}\right)}{pchpt_0 + ashpt_0}; \quad (2.82)$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{Z_c} \frac{shp\left(t_0 - \frac{x}{v}\right)}{pchpt_0 + ashpt_0}. \quad (2.83)$$

Виражаючи гіперболічні функції через експоненціальні, зводимо оператори і зображення напруги та струму до вигляду

$$U(p, x) = \frac{U_0}{p+a} \frac{e^{-p\frac{x}{v}} + e^{-p\left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)}}{1 + \frac{p-a}{p+a} e^{-2pt_0}}; \quad (2.84)$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{Z_c} \frac{1}{p+a} \frac{e^{-p\frac{x}{v}} - e^{-p\left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)}}{1 + \frac{p-a}{p+a} e^{-2pt_0}}. \quad (2.85)$$

Перехід до оригіналів виконуємо за методом Даламбера. Помічаючи, що при $\operatorname{Re} p > 0$, $\left| \frac{p-a}{p+a} \right| < 1$, $|e^{-2pt_0}| < 1$ можна записати (2.84) та (2.85) у вигляді геометричної прогресії:

$$\begin{aligned} U(p, x) &= U_0 \frac{1}{p+a} \left[e^{-p\frac{x}{v}} + e^{-p\left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)} \right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{p-a}{p+a} e^{-2pt_0} + \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 e^{-4pt_0} - \dots \right] = \\ &= U_0 \frac{1}{p+a} \left[e^{-p\frac{x}{v}} + e^{-p\left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)} - \frac{p-a}{p+a} e^{-p\left(2t_0 + \frac{x}{v}\right)} - \frac{p-a}{p+a} e^{-p\left(4t_0 - \frac{x}{v}\right)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 e^{-p\left(4t_0 - \frac{x}{v}\right)} + \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 e^{-p\left(6t_0 - \frac{x}{v}\right)} + \dots \right]; \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} I(p, x) &= \frac{U_0}{Z_c} \frac{1}{p+a} \left[e^{-p\frac{x}{v}} - e^{-p\left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)} - \left(\frac{p-a}{p+a} \right) e^{-p\left(2t_0 + \frac{x}{v}\right)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p-a}{p+a} \right) e^{-p\left(4t_0 - \frac{x}{v}\right)} + \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 e^{-p\left(4t_0 + \frac{x}{v}\right)} - \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 e^{-p\left(6t_0 - \frac{x}{v}\right)} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Скористаємося відомим співвідношенням операторного обчислення:

$$\frac{1}{p+a} \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^n \stackrel{\bullet}{=} e^{-at} L_n(2at),$$

де $L_n(2at)$ — функція Лагера n -го порядку;

$$L_n(2at) = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{(-2at)^i}{i!};$$

для $n=0$

$$\frac{1}{p+a} \stackrel{\bullet}{=} e^{-at};$$

для $n=1$

$$\frac{1}{p+a} \left(\frac{p-a}{p+a} \right) \stackrel{\bullet}{=} e^{-at} (1-2at);$$

для $n=2$

$$\frac{1}{p+a} \left(\frac{p-a}{p+a} \right)^2 \stackrel{\bullet}{=} e^{-at} \left[1 - 4at + \frac{1}{2}(2at)^2 \right].$$

Множники $e^{-p\left(2kt_0 + \frac{x}{v}\right)}$, де $k=0, 1, 2, 3, \dots$ у (2.86), (2.87) відповідно до теореми запізнення вказують на зсунуті східчасті функції, тобто на початок дії чергових прямих або зворотних хвиль. Вирази для оригіналів напруги та струму мають такий вигляд:

$$u(t, x) = U_0 \left\{ e^{-a\left(t - \frac{x}{v}\right)} \cdot 1\left(t - \frac{x}{v}\right) + e^{-a\left[t - \left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)\right]} \cdot 1\left[t - \left(2t_0 - \frac{x}{v}\right)\right] - e^{-a\left[t - \left(2t_0 + \frac{x}{v}\right)\right]} \cdot \left[1 - 2a\left(t - \left(2t_0 + \frac{x}{v}\right)\right)\right] \cdot 1\left[t - \left(2t_0 + \frac{x}{v}\right)\right] - e^{-a\left[t - \left(4t_0 - \frac{x}{v}\right)\right]} \cdot \dots \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 - 2a \left(t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right) \right] \cdot 1 \left[t - \left(4t_0 - \frac{x}{v} \right) \right] + \\ & + e^{-a \left[t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right]} \left[1 - 4a \left(t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right) + \right. \\ & \left. + 2a^2 \left(t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right)^2 \right] \cdot 1 \left[t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right] + \dots \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(t, x) = \frac{U_0}{Z_c} & \left\{ e^{-a \left(t - \frac{x}{v} \right)} \cdot 1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - e^{-a \left[t - \left(2t_0 - \frac{x}{v} \right) \right]} \cdot 1 \left[t - \left(2t_0 - \frac{x}{v} \right) \right] - \right. \\ - e^{-a \left[t - \left(2t_0 + \frac{x}{v} \right) \right]} & \left[1 - 2a \left(t - \left(2t_0 + \frac{x}{v} \right) \right) \right] 1 \left[t - \left(2t_0 + \frac{x}{v} \right) \right] + e^{-a \left[t - \left(4t_0 - \frac{x}{v} \right) \right]} \times \\ \times \left[1 - 2a \left(t - \left(4t_0 - \frac{x}{v} \right) \right) \right] & \cdot 1 \left[t - \left(4t_0 - \frac{x}{v} \right) \right] + \\ + e^{-a \left[t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right]} & \left[1 - 4a \left(t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right) + \right. \\ + 2a^2 \left(t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right)^2 & \left. \right] \cdot 1 \left[t - \left(4t_0 + \frac{x}{v} \right) \right] + \dots \Big\}. \end{aligned}$$

Задача 2.13. Визначити напругу на конденсаторі C за умов попередньої задачі. Побудувати графік $u_c(t)$ в інтервалі часу $0 \leq t \leq 6 \frac{l}{x}$, якщо $l = 300 \text{ м}$, $v = 3 \cdot 10 \text{ км/с}$, $Z_c = 400 \text{ Ом}$, $C = 5 \text{ нФ}$.

Розв'язання. Напругу на конденсаторі дістанемо за виразом, здобути у попередній задачі для напруги в лінії $u(t, x)$, якщо в ньому прийняти $x = 0$:

$$u_c(t) = u(t, 0) = U_0 \left\{ e^{-at} \cdot 1(t) + e^{-a(t-2t_0)} \cdot 1(t-2t_0) - e^{-a(t-2t_0)} \times \right. \\ \times [1 - 2a(t-2t_0)] \cdot 1(t-2t_0) - e^{-a(t-4t_0)} [1 - 2a(t-4t_0)] \cdot 1(t-4t_0) + \\ \left. + e^{-a(t-4t_0)} [1 - 4a(t-4t_0) + 2a^2(t-4t_0)^2] \cdot 1(t-4t_0) + \dots \right\}.$$

Елементарні перетворення дозволяють записати цей вираз у більш простій формі:

$$u_c(t) = U_0 \left\{ e^{-at} \cdot 1(t) + e^{-a[t-2t_0]} \cdot 2a(t-2t_0) \cdot 1(t-2t_0) - \right. \\ \left. + e^{-a(t-4t_0)} \cdot 2a(t-4t_0) [1 - a(t-4t_0)] \cdot 1(t-4t_0) + \dots \right\}.$$

За вказаних в умові задачі значень параметрів маємо:

$$a = \frac{1}{Z_c C} = \frac{1}{400 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1};$$

$$t_0 = \frac{l}{v} = \frac{300}{3 \cdot 10^8} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Для побудови графіка $u_c(t)$ використовуємо формули:

1) при $0 \leq t < 2t_0 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$:

$$u_c(t) = 1000e^{-5 \cdot 10^4 t};$$

2) при $2 \cdot 10^{-6} \leq t < 4t_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$:

$$u_c(t) = U_0 \left[e^{-at} + e^{-a(t-2t_0)} 2a(t-2t_0) \right] = U_0 e^{-at} \left[1 + e^{-2at_0} 2a(t-2t_0) \right] = \\ = 1000e^{-5 \cdot 10^5 t} \left[1 + 27,18 \cdot 10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6}) \right];$$

2) при $4 \cdot 10^{-6} \text{ c} \leq t < 6t_0 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ c}$:

$$u_c(t) = U_0 e^{-at} \left\{ 1 + e^{2at_0} \cdot 2a(t - 2t_0) - e^{4at_0} \cdot 2a(t - 4t_0) \times \right. \\ \left. \times [1 - a(t - 4t_0)] \right\} = 1000 e^{-at} \left\{ 1 + 27,18 \cdot 10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6}) - \right. \\ \left. - 73,89 \cdot 10^5 (t - 4 \cdot 10^{-6}) [1 - 5 \cdot 10^5 (t - 4 \cdot 10^{-6})] \right\}.$$

Графік $u_c(t)$ показано на рис. 2.47, б.

Задача 2.14. Для формування імпульсів застосовується лінія без втрат довжиною $2l$ і хвильовим опором Z_c , у середині якої ввімкнено резистор $R = Z_c$, а кінець розімкнено (рис. 2.48). У момент $t = 0$ лінія вмикається до джерела постійної напруги E . Визначити форму імпульсної напруги на резисторі R .

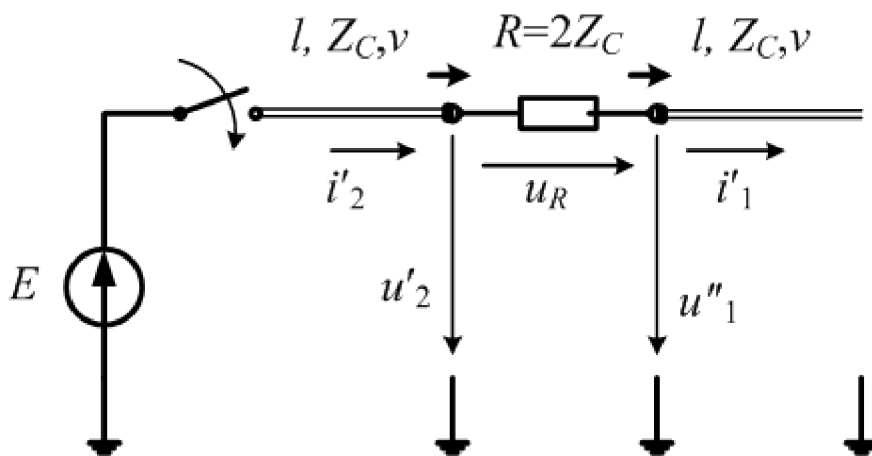


Рис. 2.48

Розв'язання. Початкові умови нульові. Операторні зображення напруги та струму в першій половині лінії:

$$\begin{aligned}
 U'(p, x) &= A_1(p)e^{-p\frac{x}{v}} + A_2(p)e^{p\frac{x}{v}}; \\
 I'(p, x) &= \frac{1}{Z_c} \left[A_1(p)e^{-p\frac{x}{v}} - A_2(p)e^{p\frac{x}{v}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.88}$$

Операторні зображення напруги та струму в другій половині лінії:

$$\begin{aligned}
 U''(p, x') &= A_3(p)e^{-p\frac{x'}{v}} + A_4(p)e^{p\frac{x'}{v}}; \\
 I''(p, x') &= \frac{1}{Z_c} \left[A_3(p)e^{-p\frac{x'}{v}} - A_4(p)e^{p\frac{x'}{v}} \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

Функції $A_1(p)$, $A_2(p)$, $A_3(p)$, $A_4(p)$ знаходимо, використовуючи граничні умови:

$$1) \text{ при } x = 0 \quad U'_1(p) = \frac{E}{p};$$

$$2) \text{ при } x = l, x' = 0 \quad I'_2(p) = I'_1(p);$$

$$3) \text{ при } x = l, x' = 0$$

$$U_R(p) = U'_2(p) - U''_1(p) = RI'_2(p) = 2Z_c I'_2(p);$$

$$4) \text{ при } x = 2l, x' = l \quad I''_2(p) = 0.$$

Записавши граничні умови у розгорнутому вигляді з урахуванням (2.88) матимемо:

$$1) A_1(p) + A_2(p) = \frac{E}{p};$$

$$2) A_1(p)e^{-p\frac{l}{v}} - A_2(p)e^{p\frac{l}{v}} = A_3(p) - A_4(p);$$

$$3) U_R(p) = A_1(p)e^{-p\frac{l}{v}} + A_2(p)e^{p\frac{l}{v}} - A_3(p) - A_4(p) =$$

$$= 2 \left[A_1(p) e^{-p \frac{l}{v}} - A_2(p) e^{p \frac{l}{v}} \right];$$

$$4) A_3(p) e^{-p \frac{l}{v}} - A_4(p) e^{p \frac{l}{v}} = 0.$$

З рівнянь 2) та 3) дістанемо

$$A_3(p) = A_2(p) e^{p \frac{l}{v}}; \quad (2.90)$$

$$A_4(p) = -A_1(p) e^{-p \frac{l}{v}} + 2A_2(p) e^{p \frac{l}{v}}. \quad (2.91)$$

Тепер рівняння 1) та 4) можна записати так:

$$A_1(p) + A_2(p) = \frac{E}{p};$$

$$A_2(p) e^{p \frac{l}{v}} e^{-p \frac{l}{v}} - \left[2A_2(p) e^{p \frac{l}{v}} - A_1(p) e^{-p \frac{l}{v}} \right] \cdot e^{p \frac{l}{v}},$$

$$\text{або } A_1(p) + A_2(p) = \frac{E}{p}; \quad A_1(p) + A_2(p) = 2A_2(p) e^{p \frac{2l}{v}},$$

$$\text{звідки } A_2(p) = \frac{1}{2} \frac{E}{p} e^{-p \frac{2l}{v}}; \quad A_1(p) = \frac{E}{p} - \frac{1}{2} \frac{E}{p} e^{-p \frac{2l}{v}}.$$

Операторне зображення напруги на резисторі R :

$$\begin{aligned} U_R(p) &= 2 \left(\frac{E}{p} - \frac{1}{2} \frac{E}{p} e^{-p \frac{2l}{v}} \right) e^{-p \frac{l}{v}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{E}{p} e^{-p \frac{2l}{v}} \cdot e^{p \frac{l}{v}} = \\ &= \frac{E}{p} e^{-p \frac{l}{v}} - \frac{E}{p} e^{-p \frac{3l}{v}}. \end{aligned}$$

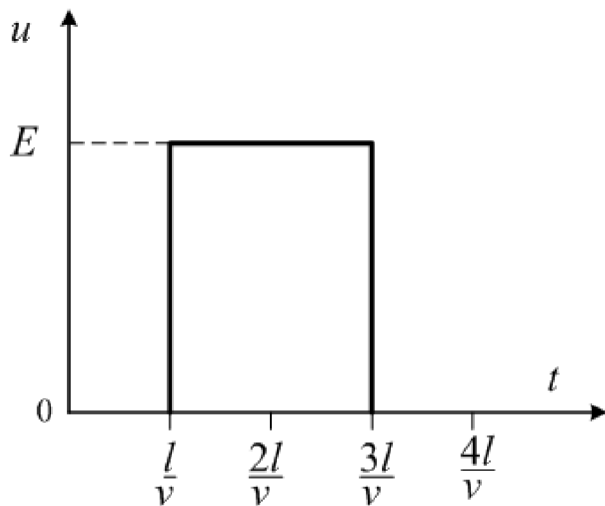


Рис. 2.49

Переходячи до оригіналу, отримаємо

$$U_R(t) = E \cdot 1\left(t - \frac{l}{v}\right) - E \cdot 1\left(t - \frac{3l}{v}\right)$$

Отже, на резисторі R формується прямокутний імпульс напруги тривалістю $T = 2l/v$, графік якого показано на рис. 2.49.

Задача 2.15. Неспотворювальну лінію довжиною l з хвильовим опором Z_c при $t = 0$ вмикають до джерела постійної напруги U_0 .

Здобути аналітичні вирази для напруги та струму в лінії після комутації, якщо в кінці лінії навантажена на резистор R_2 .

Розв'язання

Застосуємо операторний метод розрахунку. Граничні умови на початку та в кінці лінії:

$$1) U_1(p) = U(p, 0) = \frac{U_0}{p};$$

$$2) U_2(p) = U(p, l) = R_2 I_2(p) = R_2 I(p, l);$$

3) (2.75) дістанемо

$$U_2(p) = \frac{U_0}{p} \frac{R_2}{R_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}; \quad (2.92)$$

$$I_2(p) = \frac{U_0}{p} \frac{1}{R_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}. \quad (2.93)$$

Підставляючи (2.92), (2.93) у (2.75), для операторних зображень напруги та струму в лінії матимемо

$$U(p, x) = \frac{U_0}{p} \frac{R_2 \operatorname{ch} \gamma(l-x) + Z_c \operatorname{sh} \gamma(l-x)}{R_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}; \quad (2.94)$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{p Z_c} \frac{R_2 \operatorname{sh} \gamma(l-x) + Z_c \operatorname{ch} \gamma(l-x)}{R_2 \operatorname{ch} \gamma l + Z_c \operatorname{sh} \gamma l}. \quad (2.95)$$

У рівняннях (2.92)–(2.95).

$\gamma = \alpha + \frac{p}{v}$ — коефіцієнт поширення неспотворювальної лінії;

$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ — коефіцієнт послаблення;

$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ — швидкість поширення хвиль;

$Z_c = \sqrt{\frac{L_0}{G_0}}$ — характеристичний опір неспотворювальної лінії.

Для того, щоб від операторних зображень $U(p, x)$ і $I(p, x)$ перейти до оригіналів, виразимо гіперболічні функції через експоненціальні і після елементарних перетворень отримаємо:

$$U(p, x) = \frac{U_0}{p} \frac{e^{-\gamma x} + n e^{-\gamma(2l-x)}}{1 + n e^{-2\gamma l}};$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{Z_c p} \frac{e^{-\gamma x} - n e^{-\gamma(2l-x)}}{1 + n e^{-2\gamma l}},$$

де $n = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}$.

Вираз $1/(1 + n e^{-2\gamma l})$ запишемо як суму членів ряду спадної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1+ne^{-2\gamma l}} = 1 - ne^{-2\gamma l} + n^2 e^{-4\gamma l} - n^3 e^{-6\gamma l} + n^4 e^{-8\gamma l} - \dots$$

Отже,

$$U(p, x) = \frac{U_0}{p} \left[e^{-\gamma x} + ne^{-\gamma(2l-x)} - ne^{-\gamma(2l+x)} - n^2 e^{-\gamma(4l-x)} + \right. \\ \left. + n^2 e^{-\gamma(4l+x)} + n^3 e^{-\gamma(6l+x)} - \dots \right];$$

$$I(p, x) = \frac{U_0}{Z_c p} \left[e^{-\gamma x} - ne^{-\gamma(2l-x)} - ne^{-\gamma(2l+x)} + n^2 e^{-\gamma(4l-x)} + \right. \\ \left. + n^2 e^{-\gamma(4l+x)} - n^3 e^{-\gamma(6l-x)} - \dots \right].$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{1}{p} e^{-\gamma x} = \frac{1}{p} e^{-\alpha x} e^{-p \frac{x}{v}} = e^{-\alpha x} \cdot 1 \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

остаточно дістанемо

$$u(t, x) = U_0 \left[e^{-\alpha x} \cdot 1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + ne^{-\alpha(2l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{2l-x}{v} \right) - ne^{-\alpha(2l+x)} \times \right. \\ \times 1 \left(t - \frac{2l+x}{v} \right) - n^2 e^{-\alpha(4l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{4l-x}{v} \right) + n^2 e^{-\alpha(4l+x)} \cdot 1 \left(t - \frac{4l+x}{v} \right) + \\ \left. + n^3 e^{-\alpha(6l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{6l-x}{v} \right) + \dots \right];$$

$$i(t, x) = \frac{U_0}{Z_c} e^{-\alpha x} \cdot 1 \left(t - \frac{x}{v} \right) - ne^{-\alpha(2l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{2l-x}{v} \right) - ne^{-\alpha(2l+x)} \times \\ \times 1 \left(t - \frac{2l+x}{v} \right) + n^2 e^{-\alpha(4l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{4l-x}{v} \right) + n^2 e^{-\alpha(4l+x)} \cdot 1 \left(t - \frac{4l+x}{v} \right) - \\ - n^3 e^{-\alpha(6l-x)} \cdot 1 \left(t - \frac{6l-x}{v} \right) - \dots \left. \right].$$

2.6. Перехідні процеси в лініях з втратами

Для лінії з втратами запишемо телеграфні рівняння:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

За нульових початкових умов, тобто при $i(0, x) = 0$ і $u(0, x) = 0$, операторні зображення (2.96) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} -\frac{dU(p, x)}{dx} &= R_0 I(p, x) + pL_0 I(p, x); \\ -\frac{dI(p, x)}{dx} &= G_0 U(p, x) + pC_0 U(p, x). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Це звичайні диференціальні рівняння, змінна p відносно диференціювання розглядається як параметр.

$R_0 + pL_0 = Z_0(p)$, $G_0 + pC_0 = Y_0(p)$ — погонні операторні опір і провідність лінії.

Рівняння (2.97) формально повністю відповідають комплексним рівнянням, які описують режим усталених синусоїдних коливань в лінії. Це означає, що для отримання розв'язків системи (2.97) досить взяти розв'язок цих рівнянь, замінивши в усіх виразах $j\omega$ на p . Отже,

$$\begin{aligned} U(p, x) &= A(p)e^{-\gamma x} + B(p)e^{\gamma x}; \\ I(p, x) &= \frac{1}{Z_c(p)} [A(p)e^{-\gamma x} - B(p)e^{\gamma x}], \end{aligned} \quad (2.98)$$

де $Z(p) = \sqrt{\frac{R_0 + pL}{G_0 + pC}}$, $Z(p)$ — операторний хвильовий опір лінії;

$\gamma(p) = \sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}$, $\gamma(p)$ — операторний коефіцієнт поширення.

Сталі $A(p)$ і $B(p)$ визначаються за граничними умовами на початку і в кінці лінії так, як це робилось для синусоїдного усталеного режиму. Наприклад, напруга і струм для будь-якого x :

$$\begin{aligned} U(p, x) &= U_2(p) \operatorname{ch}\gamma(l-x) + I_2(p) Z_c \operatorname{sh}\gamma(l-x); \\ I(p, x) &= \frac{U_2(p)}{Z_c(p)} \operatorname{sh}\gamma(l-x) + I_2(p) \operatorname{ch}\gamma(l-x), \end{aligned} \quad (2.99)$$

де $U_2(p) = U(p, L)$, $I_2(p) = I(p, L)$ операторні напруга та струм у кінці лінії; x — координата, яка відраховується від початку лінії.

Залишається лише знайти оригінали напруги $u(t, x)$ та струму $i(t, x)$ за правилами операторного обчислення.

Для $x = 0$ маємо $U(p, 0) = U_1(p)$, $I(p, 0) = I_1(p)$.

Отже,

$$\begin{aligned} U_1(p) &= U_2 \operatorname{ch}\gamma l + I_2 Z_c \operatorname{sh}\gamma l; \\ I_1(p) &= \frac{U_2}{Z_c} \operatorname{sh}\gamma l + I_2 \operatorname{ch}\gamma l. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Рівняння (2.100) пов'язують операторні зображення напруги та струму на початку та в кінці лінії. Вони справедливі для будь-якого закону зміни напруги та струму від часу.

Запишемо (2.98) у вигляді

$$\begin{aligned} U(p, x) &= U_\phi(p, x) + U_\psi(p, x); \\ I(p, x) &= \frac{1}{Z_c(p)} [U_\phi(p, x) - U_\psi(p, x)] = I_\phi(p, x) - I_\psi(p, x), \end{aligned} \quad (2.101)$$

де $U_\phi(p, x) = A(p)e^{-\gamma x}$; $U_\psi(p, x) = B(p)e^{\gamma x}$; $I_\phi(p, x) = \frac{U_\phi(p, x)}{Z_c(p)}$;

$$I_{\psi}(p, x) = \frac{U_{\psi}(p, x)}{Z_c(p)}.$$

Існує наочна фізична інтерпретація напруг u_{φ}, u_{ψ} та струмів i_{φ}, i_{ψ} для неспотворювальної лінії, тобто за виконання умови

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}.$$

У цьому разі

$$Z_c(p) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}};$$

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_0(p)Y_0(p)} = \sqrt{\frac{Z_0(p)}{Y_0(p)}}Y_0(p) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}(G_0 + pC_0) = \alpha + \frac{p}{v},$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$; $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$.

Отже, можна записати:

$$U_{\varphi}(p, x) = A(p)e^{-\alpha x} e^{-p\frac{x}{v}};$$

$$U_{\psi}(p, x) = B(p)e^{\alpha x} e^{p\frac{x}{v}}.$$

Якщо $\varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} A(p)$; $\psi(t) \stackrel{\cdot}{=} B(p)$, то

$$u_{\varphi}(t, x) = \varphi\left(t - \frac{x}{v}\right)e^{-\alpha x}; \quad (2.102)$$

$$u_{\psi}(t, x) = \psi\left(t + \frac{x}{v}\right)e^{\alpha x}. \quad (2.103)$$

Аналізуючи (2.102), (2.103) робимо висновок, що u_φ та u_ψ у неспотворювальній лінії — це, відповідно, пряма та зворотна хвиля. Вони поширюються з постійною швидкістю v без зміни форми, але загасають у напрямку поширення по законом експоненти.

При $\alpha = 0$ доходимо результатів, які були раніше отримані для безвтратної лінії.

Пряма та зворотна хвилі струму мають ту саму швидкість, форму і згасання, що й відповідні хвилі напруги, оскільки рівняння для u_φ та i_φ , u_ψ та i_ψ відрізняються лише множником $1/Z_c$.

Внаслідок аналізу перехідних процесів в ідеалізованій лінії без втрат дістаємо практично прийнятні результати для відносно коротких ліній з малими втратами. Похибки, які виникають за рахунок опору проводів та провідності ізоляції, можна оцінювати, користуючись (2.102) і (2.103).

2.7. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.16. Повітряна лінія ($l = 60$ км, $Z_c = 800$ Ом) замкнена на послідовно з'єднані $R = 200$ Ом і $C = 100$ нФ. Лінія вмикається до джерела постійної напруги $U_0 = 1000$ В.

Записати вирази для побудови графіків розподілу напруги та струму вздовж лінії для моменту часу, коли хвиля, відбившись від кінця, дійде до середини лінії.

Відповідь: при $0 \leq x \leq 30$ км $u(x) = 1000$ В, $i(x) = 1,25$ А;

при $30 \text{ км} \leq x \leq 60 \text{ км}$;

$$u(x) = 2000 - 1600e^{-1000\left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5}\right)} \text{ В,}$$

$$i(x) = 2e^{-1000\left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{3 \cdot 10^5}\right)} \text{ А.}$$

Задача 2.17. Повітряна лінія ($l = 120$ км, $Z_c = 500$ Ом) замкнена на резистор $R_2 = 300$ Ом. При $t = 0$ лінія вмикається до джерела постійної напруги $U_0 = 120$ В з внутрішнім опором $R = 100$ Ом.

Побудувати графік залежності напруги U_2 у кінці лінії від часу в інтервалі $0 \leq t \leq 1,4 \cdot 10^{-3}$ с після комутації.

Відповідь: при $0 \leq t \leq 0,4 \cdot 10^{-3}$ с $u_2(t) = 0$;

при $0,4 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,2 \cdot 10^{-3}$ с $u_2(t) = 75$ В;

при $1,2 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,4 \cdot 10^{-3}$ с $u_2(t) = 87,5$ В.

Задача 2.18. За умов задачі 2.17 побудувати графік залежності струму i_1 джерела U_0 від часу в інтервалі $0 \leq t \leq 1,8 \cdot 10^{-3}$ с.

Відповідь: при $0 \leq t \leq 0,8 \cdot 10^{-3}$ с $i_1(t) = 0,2$ А;

при $0,8 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,6 \cdot 10^{-3}$ с $i_1(t) = 283$ А;

при $1,6 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,8 \cdot 10^{-3}$ с $i_1(t) = 0,297$ А.

Задача 2.19. За умов задачі 2.17 побудувати графік залежності напруги та струму в точці, яка знаходиться посередині лінії, від часу в інтервалі $0 \leq t \leq 1,4 \cdot 10^{-3}$ с після комутації.

Відповідь: при $0 \leq t \leq 0,2 \cdot 10^{-3}$ с $u = 0$ В, $i = 0,2$ А;

при $0,2 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 0,6 \cdot 10^{-3}$ с $u = 100$ В, $i = 0,25$ А;

при $0,6 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,0 \cdot 10^{-3}$ с $u = 75$ В, $i = 0,283$ А;

при $1,0 \cdot 10^{-3}$ с $\leq t \leq 1,4 \cdot 10^{-3}$ с $u = 91,7$ В, $i = 0,297$ А.

Задача 2.20. Побудувати графіки розподілу напруги та струму вздовж ліній (рис. 2.50) через 300 мкс після того, як пряма хвиля добіжить до кінця першої лінії. Параметри кола: $U_0 = 1$ кВ, $l_1 = 30$ км, $Z_{c1} = 50$ Ом, $v_1 = 1,5 \cdot 10^5$ км/с, $l_2 = 60$ км, $Z_{c2} = 400$ Ом, $v_2 = 3 \cdot 10^5$ км/с, $R = 50$ Ом, $C = 4$ мкФ.

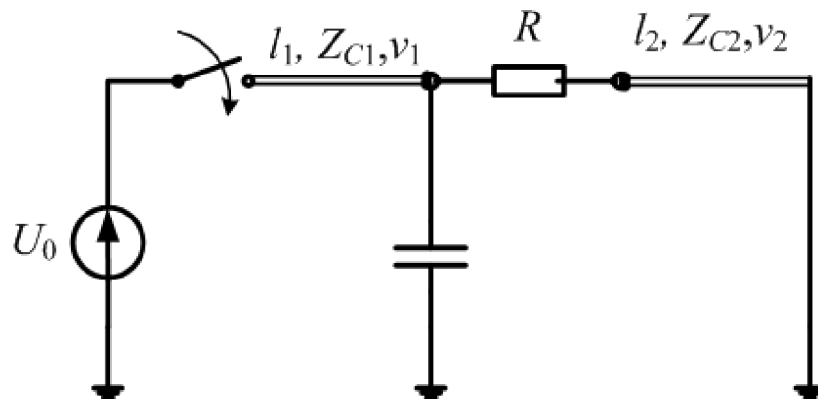


Рис. 2.50

Відповідь: при $0 \leq x' \leq 15$ км;

$$u = 1000 - 1800e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{30-x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)} + 1800e^{-5555,56 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)};$$

$$i = -12 + 36e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{30-x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)} + 36e^{-5555,56 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)};$$

при $15 \text{ км} \leq x' \leq 30 \text{ км}$

$$u = 1800 - 1800e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{30-x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)},$$

$$i = 1800 - 1800e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{30-x'}{1,5 \cdot 10^5} \right)},$$

при $0 \leq x'' \leq 30 \text{ км}$

$$u = 1600 - 1600e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{x''}{3 \cdot 10^5} \right)},$$

$$i = 4 - 4e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{x''}{3 \cdot 10^5} \right)};$$

при $30 \text{ км} \leq x'' \leq 60 \text{ км}$

$$u = -1600e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{x''}{3 \cdot 10^5} \right)} + 1600e^{-5555,56 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x''}{3 \cdot 10^5} \right)},$$

$$i = 8 - 4e^{-5555,56 \left(0,3 \cdot 10^{-3} - \frac{x''}{3 \cdot 10^5} \right)} - 4e^{-5555,56 \left(0,1 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x''}{3 \cdot 10^5} \right)},$$

де x' і x'' — відстань, яка відраховується від початку відповідно першої та другої лінії.

Задача 2.21. У кінці лінії, попередньо зарядженої до напруги U_0 , вмикається індуктивність L (рис. 2.51). Довжина лінії l , хвильовий опір Z_c . Отримати вирази для операторних зображень напруги та струму в лінії після комутації.

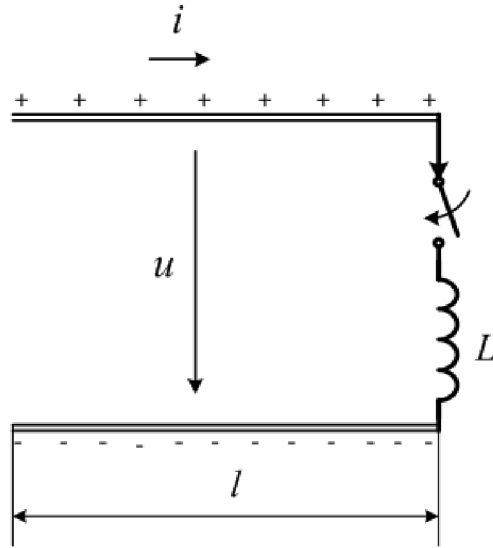


Рис. 2.51

Відповідь:

$$\begin{aligned}
 u(t, x) \stackrel{\bullet}{=} U(p, x) &= \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p} \frac{\alpha}{p + \alpha} \left[e^{-p \frac{x+l}{v}} + e^{-p \frac{l-x}{v}} - \frac{p - \alpha}{p + \alpha} e^{-p \frac{x+3l}{v}} + \right. \\
 &+ \left. \frac{p - \alpha}{p + \alpha} e^{-p \frac{x-3l}{v}} + \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^2 e^{-p \frac{x+5l}{v}} + \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^2 e^{-p \frac{5l-x}{v}} + \dots \right]; \\
 i(t, x) \stackrel{\bullet}{=} I(p, x) &= \frac{U_0}{pL} \frac{1}{p + \alpha} \left[e^{-p \frac{x+l}{v}} - e^{-p \frac{l-x}{v}} + \frac{p - \alpha}{p + \alpha} e^{-p \frac{x+3l}{v}} - \right. \\
 &- \left. \frac{p - \alpha}{p + \alpha} e^{-p \frac{x-3l}{v}} + \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^2 e^{-p \frac{x+5l}{v}} - \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^2 e^{-p \frac{5l-x}{v}} + \dots \right],
 \end{aligned}$$

де $\alpha = Z_c / L$, v — швидкість поширення хвиль:

Задача 2.22. У кінці лінії (рис. 2.52) вимикають резистор $R = 100$ Ом. Побудувати графіки розподілу напруги і струму вздовж лінії для моменту

часу $t_0 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ с після комутації. Параметри кола: $l = 60$ км, $Z_c = 50$ Ом, $L = 5$ мГн, $C = 22,222$ мкФ, $v = 1,5 \cdot 10^5$ км/с, $E = 10$ кВ.

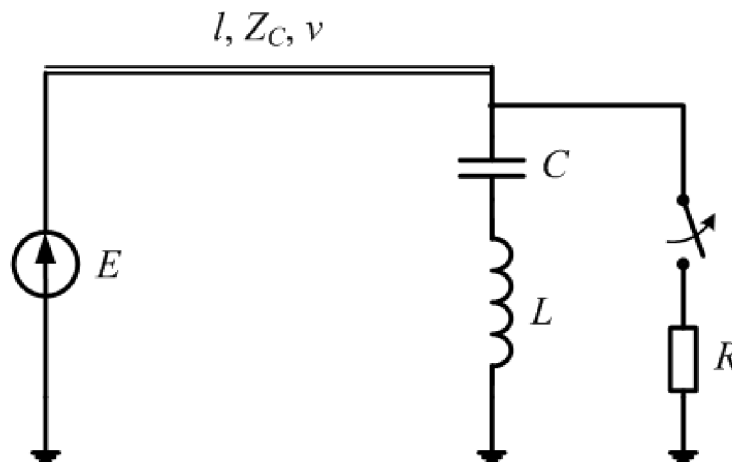


Рис. 2.52

Відповідь: при $0 \leq x \leq 60$

$$u = 10000 + 6250e^{-1000\left(0,4 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{1,5 \cdot 10^5}\right)} - 6250e^{-9000\left(0,4 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{1,5 \cdot 10^5}\right)} \text{ В,}$$

$$i = -125e^{-1000\left(0,4 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{1,5 \cdot 10^5}\right)} + 125e^{-9000\left(0,4 \cdot 10^{-3} - \frac{60-x}{1,5 \cdot 10^5}\right)} \text{ А,}$$

де x — відстань від початку лінії.

Задача 2.23. Підстанція, ємність між шинами якої $C = 2500$ пФ, захищена розрядником P , встановленим на відстані $l = 90$ м від шин (рис. 2.53). Пробивна напруга розрядника $U_{\text{пр}} = 400$ кВ. Хвильовий опір лінії $Z_c = 400$ Ом. Уздовж лінії рухається хвиля напруги з прямовисним фронтом і амплітудою $U_0 = 350$ кВ. Визначити, через який час t_0 після приходу хвилі до місця розміщення розрядника останній проб'ється.

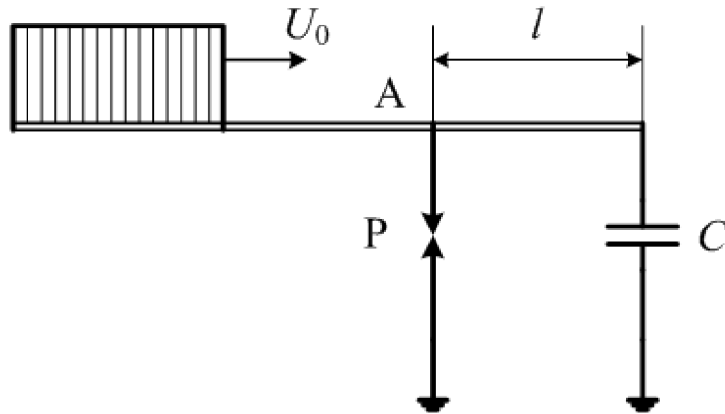


Рис. 2.53

Відповідь: $t_0 = 1,447$ мкс.

Задача 2.24. Високочастотний кабель ($l = 10$ м, $Z_c = 50$ Ом, $v = 1,5 \cdot 10^5$ км/с) з'єднує генератор синусоїдної напруги $e = 120 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ В з навантаженням $R = 50$ Ом. Частота генератора $f = 10$ МГц, внутрішній опір $R_r = 10$ Ом. При $t = 0$ сталося коротке замикання в кінці кабеля (рис. 2.54).

Побудувати графіки розподілу напруги і струму вздовж кабеля через проміжок часу $t_0 = 0,1$ мкс після короткого замикання.

Відповідь: при $0 \leq x \leq 5$ м

$$u(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}x\right) - 100 \sin\left[\frac{5\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}(10-x)\right] - \frac{200}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{15}x\right),$$

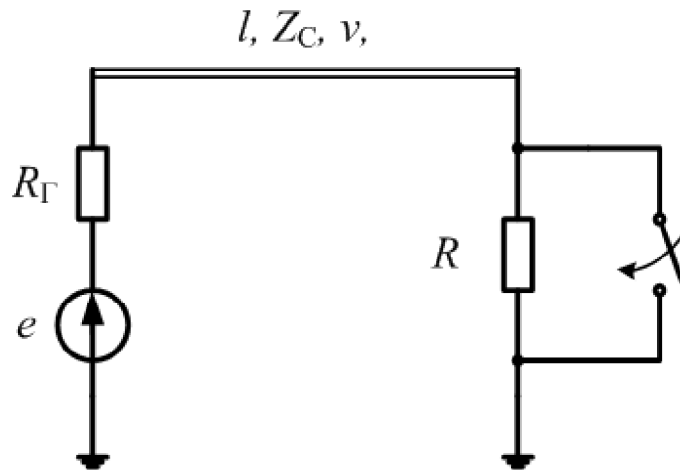


Рис. 2.54

$$i(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}x\right) + 2 \sin\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}(10-x)\right] - \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{15}x\right);$$

при $5 \text{ м} \leq x \leq 10$

$$u(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}x\right) - 100 \sin\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}(10-x)\right];$$

$$i(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}x\right) + 2 \sin\left[\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{15}(10-x)\right].$$

Задача 2.25. Розімкнена в кінці неспотворювальна лінія довжиною l вмикається до джерела постійної напруги U_1 . Записати вирази для напруги і струму в точці з координатою x .

Відповідь:

$$u = U_1 \left[e^{-\alpha x} \cdot 1\left(t + \frac{x}{v}\right) - e^{-\alpha(2l-x)} \cdot 1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-\alpha(2l+x)} \cdot 1\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) - e^{-\alpha(4l-x)} \cdot 1\left(t - \frac{4l-x}{v} + \dots\right) \Big]; \\
i = & \frac{U_1}{Z_c} \left[e^{-\alpha x} \cdot 1\left(t - \frac{x}{v}\right) - e^{-\alpha(2l-x)} \cdot 1\left(t - \frac{2l-x}{v}\right) - e^{-\alpha(2l+x)} \times \right. \\
& \times 1\left(t - \frac{2l+x}{v}\right) + e^{-\alpha(4l-x)} \cdot 1\left(t - \frac{4l-x}{v}\right) + \\
& \left. + e^{-\alpha(4l+x)} \cdot 1\left(t - \frac{4l+x}{v}\right) - e^{-\alpha(6l-x)} \cdot 1\left(t - \frac{6l-x}{v} - \dots\right) \right],
\end{aligned}$$

де α — коефіцієнт послаблення; v — швидкість поширення хвиль.

2.8. Завдання на розрахунково-графічну роботу «ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ОДНОРІДНИХ ЛІНІЯХ»

Від джерела постійної напруги E_1 з внутрішнім опором R_1 електрична енергія передається до навантаження R_2 через кабельну і повітряну лінії (рис. 2.55). Лінії з'єднані з комутатором К2. Параметри ліній: довжина відповідно l_1 і l_2 , хвильовий опір — Z_{c1} і Z_{c2} швидкість поширення хвиль — $v_1 = 1,5 \cdot 10^5$ км/с, $v_2 = 3 \cdot 10^5$ км/с. Обидві лінії безвтратні.

1. Побудувати графіки розподілу напруги та струму в лініях через $t_0 = 1,5l_1/v_1$ с після спрацьовування комутатора К1, яким до лінії вмикається пасивний двополюсник П. Схема двополюсника для різних варіантів задачі показана на рис. 2.562.

2. Вважаючи, що після спрацьовування комутатора К1 в лінії передачі встановився усталений режим:

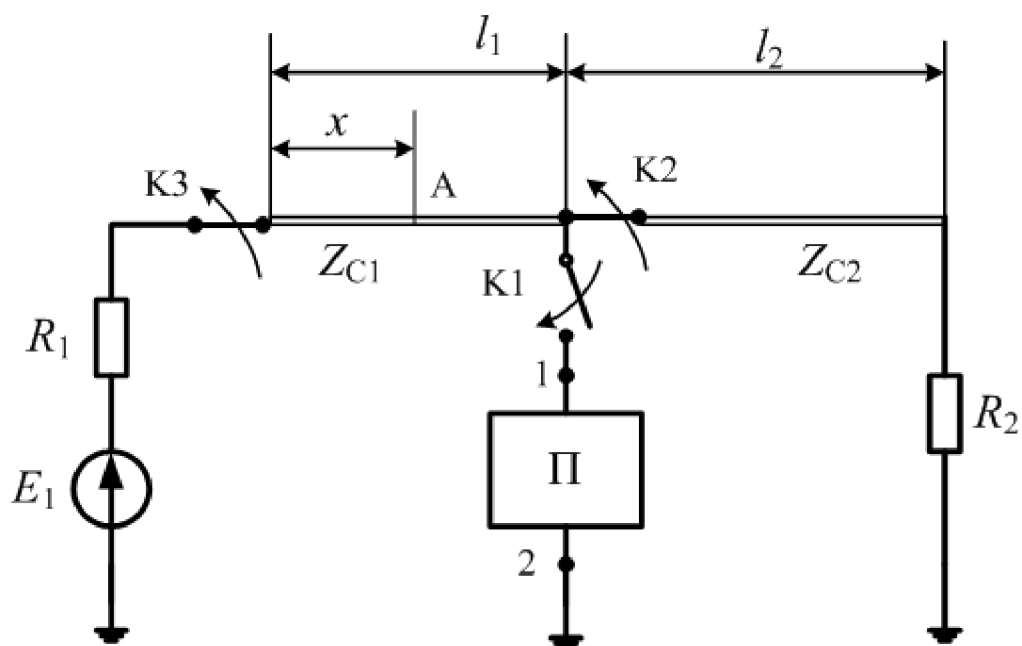


Рис. 2.55

а) побудувати графіки розподілу напруги та струму вздовж кабельної лінії через $t_0 = 1,5l_1/v_1$ с після спрацьовування комутатора $K2$;

б) побудувати графік зміни напруги в точці A кабельної лінії в інтервалі часу $0 \leq t \leq t_0$ після спрацьовування комутатора $K2$;

в/ визначити напругу та струм навантаження R_2 в інтервалі $0 \leq t \leq \infty$ після спрацьовування комутатора $K2$. Побудувати відповідні графіки.

3. Вважаючи, що після спрацьовування комутатора $K2$ в лінії передачі встановився усталений режим, побудувати графіки розподілу напруги та струму в кабельній лінії через $t_0 = 1,5l_1/v_1$ після спрацьовування комутатора $K3$.

Примітка. Дані для розрахунку вибирати згідно з шифром, складеним з трьох цифр: №1, №2, №3. Перша цифра відповідає номеру рядка в таблиці 2.1, друга — в таблиці 2.2, третя — номеру рядка в таблиці 2.3 і номеру схеми двополюсника Π на рис. 2.56.

Таблица 2.1

№ 1	$E_1, В$	$R_1, Ом$
0	1000	50
1	950	45
2	900	40
3	850	35
4	800	30
5	750	25
6	700	20
7	650	15
8	600	12
9	500	10

Таблица 2.2

№ 2	$l_1, км$	$l_2, км$	$x, км$	$R_2, Ом$
0	15	40	0,1	1700
1	30	80	0,15	300
2	45	105	0,2	1500
3	60	120	0,25	350
4	90	150	0,3	1300
5	75	125	0,35	280
6	20	30	0,4	1100
7	40	70	0,45	250
8	50	80	0,5	900
9	70	140	0,05	200

Таблица 2.3

№ 3	$Z_{c1}, Ом$	$Z_{c2}, Ом$	$R, Ом$	$L, мГн$	$C, мкФ$
0	200	850	100	30	–
1	160	800	120	40	–
2	140	750	80	45	
3	120	700	70	30	–
4	100	650	60	80	–
5	90	600	120	–	4
6	80	550	90	–	3
7	75	500	50	–	3,5
8	60	450	40	–	3,75
9	50	400	30	–	15

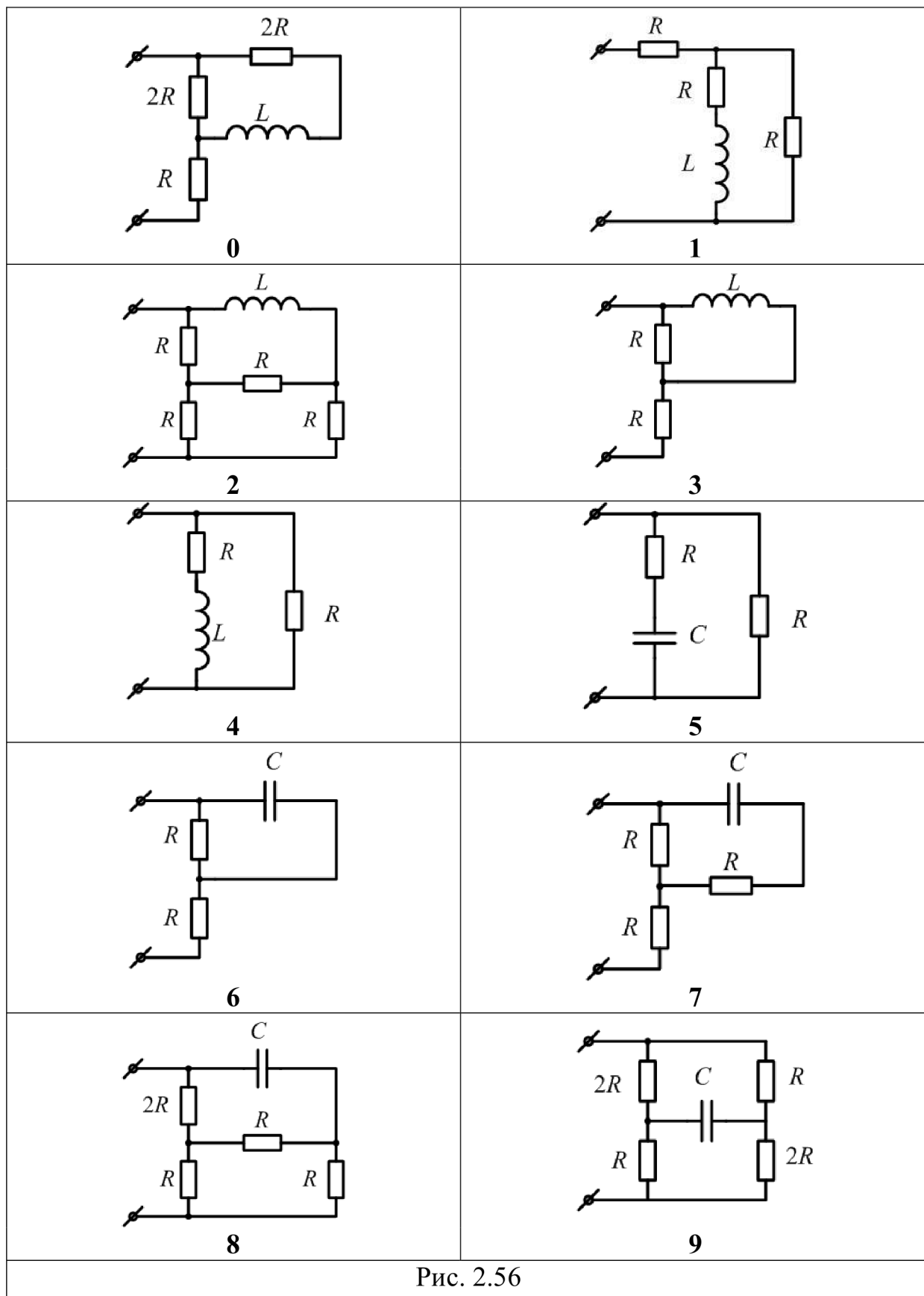


Рис. 2.56

Література:

1. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1982. – 422 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1983. – 750 с.
3. Бойко В. С., Видолоб Ю. Ф., Курило І. А. та ін. Теоретичні основи електротехніки. Т2 – К.: ІВЦ «Політехніка», 2009. – 272 с.
4. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1985. – 746 с.
5. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. Т1. – Л.: Энергоиздат, 2001. – 536 с.
6. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. – К.: Вища школа, 1992. – 439 с.
7. Теоретические основы электротехники / Под ред. П. А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1984. – 546 с.
8. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высш. шк., 1990. – 488 с.

Зміст

Передмова	3
Вступ	5
Розділ 1. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами	7
1.1. Розрахунок перехідних процесів класичним методом	7
1.1.1. Основні теоретичні положення	7
1.1.2. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів у колах першого порядку	11
1.1.3. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів у колах другого порядку	41
1.1.4. Розрахунок перехідних процесів у колах з «некоректною» комутацією	72
1.2. Розрахунок перехідних процесів операторним методом	87
1.2.1. Основні теоретичні положення	87
1.2.2. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів операторним методом	105
1.3. Розрахунок перехідних процесів при ввімкненні кола до напруги довільної форми	138
1.3.1. Особливості розрахунку перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля	138
1.3.2. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля	140
1.4. Задачі для самостійного розв'язання	160
1.5. Завдання на індивідуальну розрахунково-графічну роботу «Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами»	169
Розділ 2. Розрахунок перехідних процесів у лінійних електричних колах з розподіленими параметрами	173
2.1. Основні теоретичні положення	173
2.2. Методика і приклади розрахунку при ввімкненні лінії до джерела живлення	179
2.2.1. Розрахунок напруги і струму прямої хвилі	179
2.2.2. Розрахунок відбитих і заломлених хвиль	184

2.2.3. Типові розв'язані задачі	195
2.3. Методика і приклади розрахунку перехідних процесів у лініях при комутаціях з ненульовими початковими умовами	212
2.4. Перехідні процеси при багаторазових відбиттях хвиль від кінців лінії	228
2.5. Загальний метод розрахунку перехідних процесів у лініях скінченної довжини та приклади його використання	235
2.6. Перехідні процеси в лініях з втратами	252
2.7. Задачі для самостійного розв'язання	255
2.8. Завдання на індивідуальну розрахунково-графічну роботу «Перехідні процеси в однорідних лініях»	263
Література	267