

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ – 2
НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ
ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Теоретичні основи електротехніки: Нелінійні системи. Перехідні процеси. [Електронний ресурс]: практикум. для студ. спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю. В. Перетятко, А. А. Щерба, Шкварницька Т. Ю. – Електронні текстові дані (1 файл: 20,4 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 140 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 6 від 31.01.2020 р.) за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол №5 від 23.12.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ – 2 НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Перетятко Юлія Вікторівна*, канд. техн. наук, доц.
Щерба Анатолій Андрійович, д-р техн. наук, проф.
Шкварницька Тетяна Юріївна, канд. техн. наук, доц

Відповідальний редактор *Бойко В. С.* д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: *Бур'ян С. О.*, канд. техн. наук, доц. кафедри автоматизації електромеханічних систем та електроприводу КПІ ім. Ігоря Сікорського

Навчальний посібник (практикум) призначений для студентів вищих навчальних закладів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» всіх форм навчання, які вивчають дисципліну «Теоретичні основи електротехніки».

Практикум містить типові задачі, як розв'язані, із поданням основних властивостей та інженерних методів розрахунку, так і для самостійного аналізу за наступними розділами дисципліни «Теоретичні основи електротехніки, частина 2»:

Трифазні електричні кола;
Несинусоїдні періодичні струми та перехідні процеси;
Лінійні електричні кола з розподіленими параметрами;
Нелінійні електричні і магнітні кола.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019

ЗМІСТ

Вступ	5
-------	---

Розділ 3

ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

<i>Практичне заняття 1.</i> Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"	6
<i>Практичне заняття 2.</i> Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" та "трикутником" (мішане навантаження)	13
<i>Практичне заняття 3.</i> Розрахунок несиметричного трифазного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"	18
<i>Практичне заняття 4.</i> Розрахунок трифазних кіл з різними видами з'єднання фаз	26
<i>Практичне заняття 5.</i> Особливі випадки несиметрії в трифазних колах	30
<i>Практичне заняття 6.</i> Розрахунок трифазного методом симетричних складових	39
<i>Практичне заняття 7.</i> Підготовка до модульної контрольної роботи 1. Розрахунок трифазного кола синусоїдного струму	48

Розділ 4

НЕСИНУСОЇДНІ ПЕРІОДИЧНІ СТРУМИ ТА ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

<i>Практичне заняття 8.</i> Розрахунок однофазного лінійного кола з несинусоїдною ЕРС	49
<i>Практичне заняття 9.</i> Вищі гармоніки в трифазному колі	59
<i>Практичне заняття 10.</i> Розрахунок перехідного процесу у колі з	

одним накопичувачем енергії при дії постійних джерел енергії	67
<i>Практичне заняття 11.</i> Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії джерела синусоїдної напруги	76
<i>Практичне заняття 12.</i> Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії постійних джерел енергії	82
<i>Практичне заняття 13.</i> Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії синусоїдних джерел енергії	100
<i>Практичне заняття 14.</i> Операторний метод розрахунку перехідного процесу в електричному колі з двома накопичувачами енергії	103
<i>Практичне заняття 15.</i> Використання інтеграла Дюамеля при розрахунку перехідного процесу	113
<i>Практичне заняття 16.</i> Підготовка до модульної контрольної роботи 2. Розрахунок перехідних процесів в лінійному електричному колі	120

Розділ 5

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

<i>Практичне заняття 17.</i> Визначення параметрів однорідної довгої лінії. Неспотворювальна лінія	122
--	-----

Розділ 6

НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА

<i>Практичне заняття 18.</i> Графічний та графоаналітичний методи розрахунку нелінійного кола постійного струму	132
Список використаної літератури	140

ВСТУП

Вивчення дисципліни, які можуть бути об'єднані поняттям «Теоретичні основи електротехніки», вимагає систематичної самостійної роботи над навчальною літературою, розв'язання задач контрольних робіт і індивідуальних завдань відповідно до робочої навчальної програми. Таким чином, задовільне засвоєння дисципліни неможливе без розв'язання задач.

Головна мета практикуму полягає у допомозі студентам, які вивчають курс ТОЕ в умовах постійного зменшення кількості годин аудиторного навчання.

Матеріал практикуму розбитий на розділи, кожен з яких містить набір типових розв'язаних задач, які є прикладом оформлення задач контрольних робіт і індивідуальних завдань, а також задачі для самостійного розв'язання. Окремі типові розрахунки являють собою набори з однотипних більш складних і трудомістких завдань, кожне з яких складається з ряду підзадач або декількох незалежних завдань. Виконання типових розрахунків покликане розвинути творчі навички студентів щодо порівняльного аналізу отриманих результатів, що характерно для інженерної практики.

При укладанні практикуму врахований інтенсивний розвиток сучасної обчислювальної техніки: розрахунки та побудова графіків адаптовані до використання комп'ютерної математичної системи MathCAD.

Посібник рекомендовано для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», освітніми програмами: «Електромеханічні та мехатронні системи енергоємних виробництв» та «Інжиніринг автоматизованих електротехнічних комплексів».

Розділ 3 ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Практичне заняття 1.

Розрахунок трифазного симетричного кола при з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"

Розрахунок симетричних трифазних кіл зводиться до розрахунку однієї фази за однолінійною еквівалентною схемою. У двох інших фазах будуть такі ж за величиною струми і напруги, як в першій, але зсунені за фазою на кут 120° .

ЗАДАЧА 1.1. До симетричного трифазного джерела напругою $U = 380 \text{ В}$ увімкнений симетричний приймач, фази якого з'єднані в «зірку» (рис. 1.1,а), опори фаз $r = 12 \text{ Ом}$, $x = 16 \text{ Ом}$.

Знайти покази приладів, побудувати векторну діаграму кола.

Розв'язання

Коли говорять про напругу трифазного кола, мають на увазі лінійну напругу мережі (за умовчанням). Якщо задається фазна напруга, то це підкреслюється спеціально.

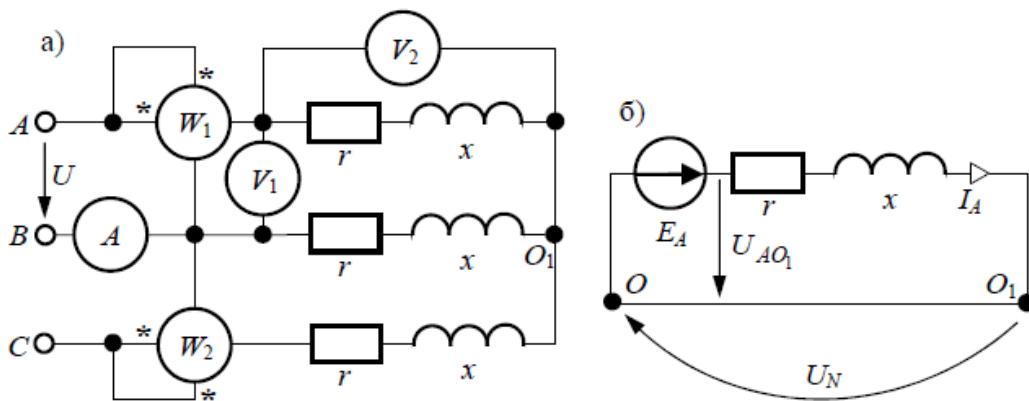


Рис. 1.1

В умовах нашої задачі напруга мережі $U = 380 \text{ В}$, причому за умови симетрії $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U = 380 \text{ В}$.

Фазні напруги менші за лінійні у 3 разів: $U_A = U_B = U_C = U/3 = 380/3 = 220 \text{ В}$.

Зауважимо, що фази генератора за умовчанням сполучені в зірку, тоді фазні ЕРС генератора $E_A = E_B = E_C = U_\phi = 220 \text{ В}$.

У симетричній системі „зірка”-„зірка” напруга $U_N = 0$ і розрахунок стану кола можна вести за схемою заміщення для однієї фази (рис. 1.1,б).

Прийmemo $E_A = 220 \text{ В}$, тоді струм в схемі заміщення

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{12 + j16} = 11e^{-j53.13^\circ} \text{ А}$$

причому фазна напруга приймача

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{E}_A - \dot{U}_N = \dot{E}_A = \dot{U}_A$$

Результати розрахунку режиму роботи решти фаз (B і C) запишемо на підставі поняття про симетричну трифазну систему прямого порядку чергування фаз

$$\dot{E}_B = \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_B = \dot{E}_A e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_C = \dot{E}_A e^{j120^\circ} \text{ В},$$

аналогічно для струмів

$$\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 11e^{-j173.13^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 11e^{j66.87^\circ} \text{ А}.$$

Векторна діаграма кола наведена на рис. 1.2, для якої потенціал нульової точки генератора, обмотки якого з'єднані в «зірку», $\phi_N = 0$ (рис. 1.1,б).

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_A &= \dot{E}_A = 220 B; \\ \dot{\phi}_B &= \dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} B; \\ \dot{\phi}_C &= \dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} B; \\ \dot{\phi}_{N'} &= \dot{\phi}_N + \dot{U}_N = 0\end{aligned}$$

а струми фаз орієнтовані відносно своєї фазної напруги (зсунені на кут

$$\varphi = \arctg \frac{x}{r} = \arctg \frac{16}{12} = 53.13^\circ).$$

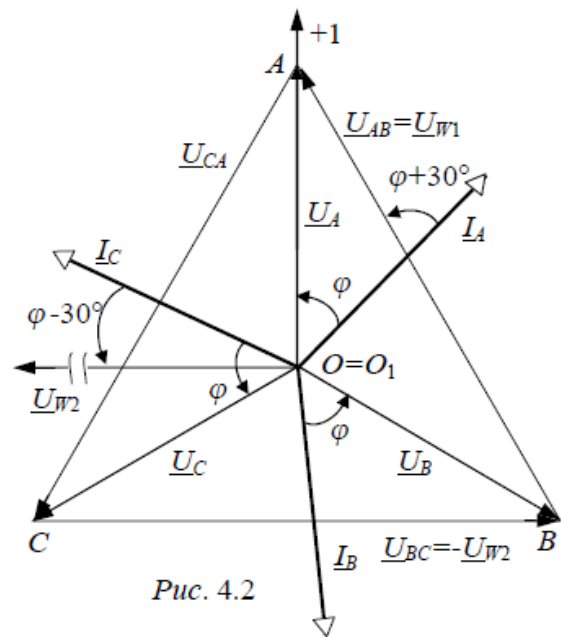


Рис. 1.2

Лінійні напруги:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{\phi}_A - \dot{\phi}_B = \dot{U}_A \sqrt{3}e^{j30^\circ} = 380e^{j30^\circ} B; \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_{AB}e^{-j120^\circ} = 380e^{-j90^\circ} B; \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_{AB}e^{j120^\circ} = 380e^{j150^\circ} B.\end{aligned}$$

Напруга і струми котушок ватметрів:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{W1} &= \dot{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ} B; \\ \dot{I}_{W1} &= \dot{I}_A = 11e^{-j53.13^\circ} A \\ \dot{U}_{W2} &= -\dot{U}_{BC} = 380e^{j90^\circ} B; \\ \dot{I}_{W2} &= \dot{I}_C = 11e^{j66.87^\circ} A.\end{aligned}$$

Покази приладів:

- амперметр A вимірює лінійний струм I_B і його показ $I_B = 11 A$;
- вольтметр V1 вимірює лінійну напругу $U_{AB} = 380 B$;
- вольтметр V2 вимірює фазну напругу приймача $U_A = 220 B$;
- покази ватметрів:

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{W1} \cdot \dot{I}_{W1}^* \right] = \operatorname{Re} \left[380e^{j30^\circ} \cdot 11e^{j53.13^\circ} \right] = 500 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{W2} \cdot \dot{I}_{W2}^* \right] = \operatorname{Re} \left[380e^{j90^\circ} \cdot 11e^{j66.87^\circ} \right] = 3846 \text{ Вт}.$$

Звертаємо увагу на суму показів двох ватметрів, яка є активною потужністю симетричного приймача. У нашому прикладі:

$$P_{W_1} + P_{W_2} = 500 + 3846 = 4346 \text{ Вт}.$$

ЗАДАЧА 1.2. Розрахувати симетричний режим з'єднання «зірка» (рис. 1.3),

якщо $r = 40 \text{ Ом}$, $x = 80 \text{ Ом}$, напруга мережі $U = 380 \text{ В}$. Побудувати векторну діаграму кола.

Відповіді: $I_C = 2,46 \text{ А}$;

$U_B = 220 \text{ В}$; $U_{BC} = 380 \text{ В}$;

$P_{W_1} = -56 \text{ Вт}$; $P_{W_2} = 780 \text{ Вт}$;

$P_{W_1} + P_{W_2} = 3I^2r = 726 \text{ Вт}$.

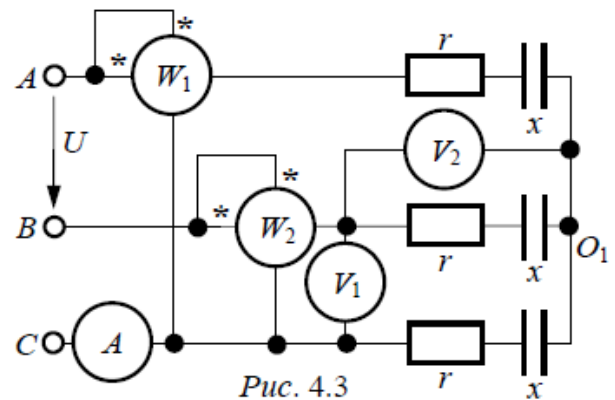


Рис. 1.3

ЗАДАЧА 1.3. Фази приймача задачі 1.2 з'єднані у трикутник (рис. 1.4).

Розрахувати режим роботи схеми. Знайти відношення між лінійними струмами кола у разі з'єднання приймача у трикутник та у зірку.

Розв'язання

При з'єднанні приймача у трикутник його лінійна напруга дорівнює фазній напрузі. Прийmemo $\dot{U}_{AB} = U = 380 \text{ В}$. Тоді

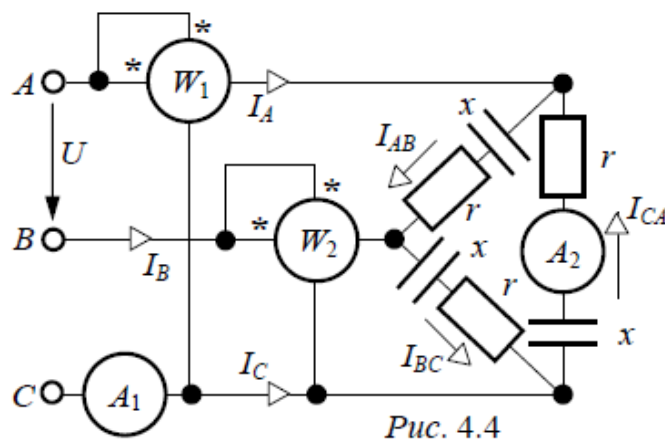


Рис. 1.4

$$\dot{U}_{AB} = 380 \text{ В}; \quad \dot{U}_{BC} = 380e^{-j120^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA} = 380e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Фазні струми розрахуємо за законом Ома:

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{380}{40 - j80} = 4.25e^{j63.44^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \dot{i}_{AB}e^{-j120^\circ} = 4.25e^{-j56.56^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \dot{i}_{AB}e^{j120^\circ} = 4.25e^{j183.44^\circ} \text{ A}.$$

Лінійні струми знаходимо за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{BC} = \sqrt{3}\dot{i}_{AB}e^{-j30^\circ} = 7.36e^{j33.44^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = \sqrt{3}\dot{i}_{BC}e^{-j30^\circ} = \dot{I}_Ae^{-j120^\circ} = 7.36e^{-j86.56^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = \sqrt{3}\dot{i}_{CA}e^{-j30^\circ} = \dot{I}_Ae^{j120^\circ} = 7.36e^{j153.44^\circ} \text{ A}.$$

Векторну діаграму струмів та напруг з'єднання у трикутник будуюмо так, щоб зручно було показувати співвідношення між лінійними і фазними струмами: з однієї точки побудуємо вектори фазної напруги трикутника (рис. 1.5,а), відносно їх зорієнтуємо фазні струми трикутника, а лінійні струми знайдемо відповідно до першого закону Кірхгофа. На підставі співвідношень між струмами, представленими на векторній діаграмі, можна наочно отримати записані вище співвідношення для розрахунку лінійних струмів.

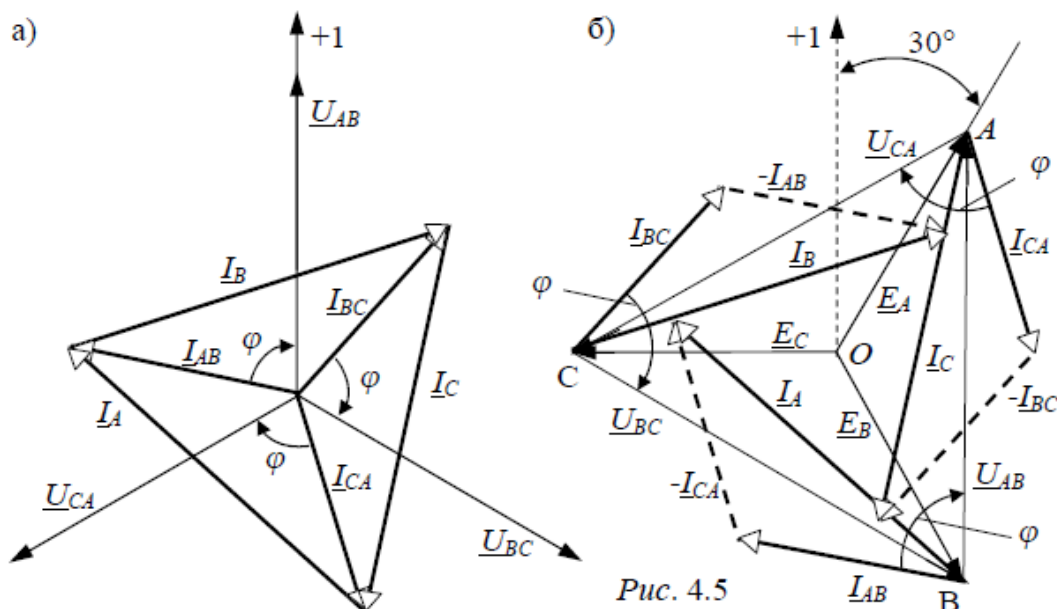


Рис. 1.5

Відмітимо, що при побудові векторної діаграми трикутника можна користуватися і традиційним способом побудови топографічної діаграми

комплексних потенціалів (рис. 1.2), орієнтуючи фазні струми трикутника відносно лінійних напруг мережі, рівних фазним напругам трикутника, як це показано на рис. 1.5,б. Проте, при такому способі побудови лінійних струмів необхідно переносити вектори фазних струмів із зворотним напрямом.

На підставі розрахунків запишемо покази амперметрів:

- лінійний струм $I_A = 7,36 \text{ A}$ вимірюється амперметром A_1 ;
- фазний струм трикутника $I_{CA} = 4,25 \text{ A}$ вимірюється амперметром A_2 .

При з'єднанні тих же опорів в зірку лінійні струми склали $I_Y = 2,46 \text{ A}$ (задача 4.2). Таким чином, при перемиканні фаз приймача із зірки на трикутник при однаковій напрузі мережі лінійний струм збільшується в 3 рази:

$$\frac{I_{\Delta}}{I_Y} = \frac{7.36}{2.46} = 3$$

Покази ватметрів в схемі рис. 1.4:

$$P_{W1} = \text{Re} \left[\dot{U}_{AC} \cdot I_A^* \right] = \text{Re} \left[-380e^{j120^\circ} \cdot 7.36e^{-j33.44^\circ} \right] = -168 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \text{Re} \left[\dot{U}_{BC} \cdot I_B^* \right] = \text{Re} \left[380e^{-j120^\circ} \cdot 7.36e^{j86.56^\circ} \right] = 2334 \text{ Вт}.$$

Сума показів двох ватметрів $P_{W1} + P_{W2} = 2167 \text{ Вт}$ дорівнює активній потужності трифазного приймача.

ЗАДАЧА 1.4. Симетричне навантаження

увімкнено до мережі з напругою 380 В (рис. 1.6). Амперметр показує $2,2 \text{ А}$.

Визначити покази ватметра, якщо:

- а) $Z_H = R_H$;
- б) $Z_H = +jX_H$;
- в) $Z_H = -jX_H$.

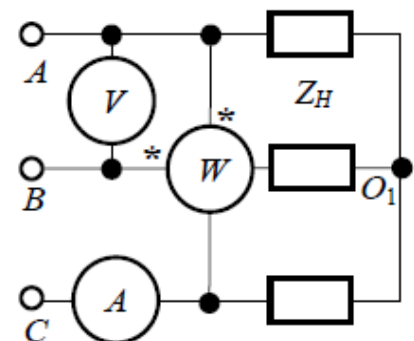


Рис. 1.6

ЗАДАЧА 1.5. Симетричне навантаження $Z_H = 10e^{j45^\circ} \text{ Ом}$ увімкнене до симетричного генератора (рис. 1.7). Визначити показ ватметра, якщо амперметр показує $17,3 \text{ А}$.

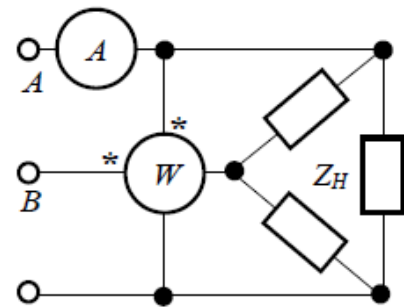


Рис. 1.7

ЗАДАЧА 1.6. Для визначення параметрів симетричного трифазного навантаження можна скористатися схемою Арона (схема увімкнення двох однофазних ватметрів для виміру активної потужності трифазного трипровідного кола) (рис. 1.8). При $U_L = 220 \text{ В}$ покази ватметрів: $P_{W1} = 2128 \text{ Вт}$, $P_{W2} = 570 \text{ Вт}$. Визначити комплекс опоры навантаження Z_H .

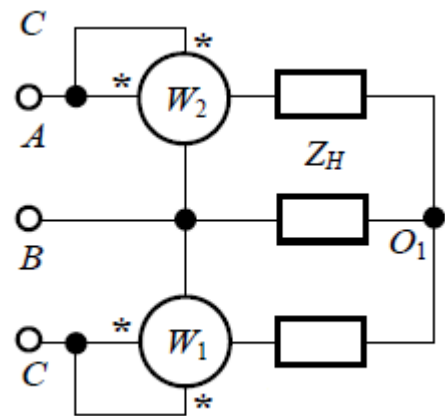


Рис. 1.8

Практичне заняття 2.
Розрахунок трифазного симетричного кола
при з'єднанні споживачів "зіркою" та "трикутником"
(мішане навантаження)

ЗАДАЧА 2.1. До джерела з лінійною напругою $U = 660 \text{ В}$ (рис. 2.1,а) через реактори з опором $x_0 = 25 \text{ Ом}$ увімкнені: електродвигун, кожна фаза якого має опір $r = x = 50 \text{ Ом}$ при сполученні зіркою; трифазний масляний конденсатор, фази якого з'єднані у трикутник і мають опір $x_C = 300 \text{ Ом}$. Визначити напругу на затискачах двигуна і його потужність. Знайти втрату напруги на реакторах.

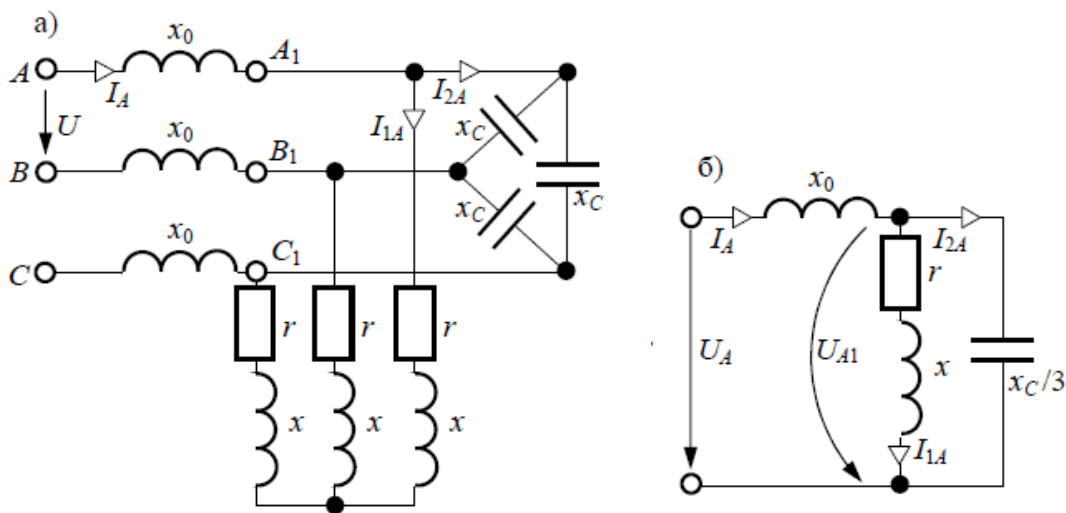


Рис. 2.1

Розв'язання

Розрахунок трифазної системи виконаємо за схемою заміщення для однієї фази (рис. 2.1, б).

Фазна напруга генератора $U_A = \frac{U}{\sqrt{3}} = 380 \text{ В}$.

Опір еквівалентної симетричному трикутнику зірки $x_Y = \frac{x_C}{3} = \frac{300}{3} = 100 \text{ Ом}$

Прийmemo $\dot{U}_A = U_A = 380 \text{ В}$, тоді

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{jx_0 + \frac{(r + jx)(-jx_Y)}{r + jx - jx_Y}} = \frac{380}{j25 + \frac{(50 + j50)(-j100)}{50 + j50 - j100}} = \frac{380}{j25 + 100} = 3.687e^{-j14.04^\circ} \text{ A}$$

фазна напруга двигуна

$$\dot{U}_{A1} = \dot{I}_A \frac{(r + jx)(-jx_Y)}{r + jx - jx_Y} = 3.687e^{-j14.04^\circ} \cdot 100 = 368.7e^{-j14.04^\circ} \text{ B.}$$

Лінійна напруга на затискачах двигуна (рис. 2.1, а)

$$U_{A1B1} = \sqrt{3}U_{A1} = \sqrt{3}368.7 = 638.6 \text{ B}$$

Втрата напруги $\Delta U = U_{AB} - U_{A1B1} = 660 - 638.6 = 21.4 \text{ B}$, що у відсотковому вираженні від напруги мережі складає

$$\Delta U \% = \frac{\Delta U}{U_{AB}} 100\% = \frac{21.4}{660} 100\% = 3.24\% .$$

Відмітимо, що відповідно до Правил технічної експлуатації установок споживачів (ПТЕ) втрата напруги не повинна перевищувати 5%. Таким чином, схема з реакторами для обмеження струмів короткого замикання на затискачах споживачів задовольняє ПТЕ щодо допустимої втрати напруги.

Струм двигуна

$$\dot{I}_{1A} = \frac{\dot{U}_{A1}}{r + jx} = \frac{368.7e^{-j14.04^\circ}}{50 + j50} = 5.215e^{-j59.04^\circ} \text{ A.}$$

Активна потужність двигуна

$$P = \sqrt{3}U_{A1B1}I_{1A} \cos(\varphi_1) = 3I_{1A}^2 r = 3 \cdot 5.215^2 \cdot 50 = 4079 \text{ Вт.}$$

ЗАДАЧА 2.2. На шини підстанції підприємства електрична енергія подається від двох трифазних джерел живлення, розташованих в різних географічних точках, через лінії електропередач ЛЕП1 і ЛЕП2 (рис. 2.2).

Лінійні напруги на вході ліній однакові $U_1 = U_2 = 6,3 \text{ кВ}$ і зфазовані в режимі неробочого ходу (мають однакові початкові фази відповідних одна одній фаз кола). Активні і індуктивні опори фаз першої і другої ліній

$$r_1 = 0,5 \text{ Ом}, x_1 = 0,3 \text{ Ом},$$

$$r_2 = 0,4 \text{ Ом}, x_2 = 0,6 \text{ Ом}.$$

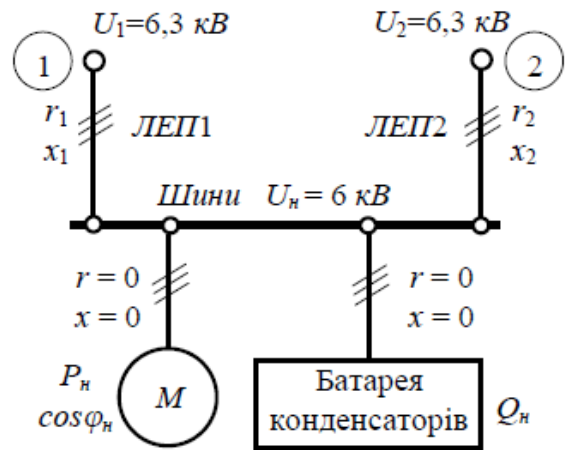


Рис. 2.2

Номинальна напруга на шинах підстанції $U_n = 6 \text{ кВ}$, встановлена потужність двигунів $P_n = 4000 \text{ кВт}$ при $\cos\varphi = 0.8$ при $\varphi > 0$, реактивна потужність статичних конденсаторів $Q_n = 2500 \text{ квар}$.

Визначити напругу на шинах підстанції, струми ліній, активні, реактивні і повні потужності джерел живлення.

Розв'язання

Побудуємо схему заміщення трифазної системи для однієї фази (рис. 2.3).

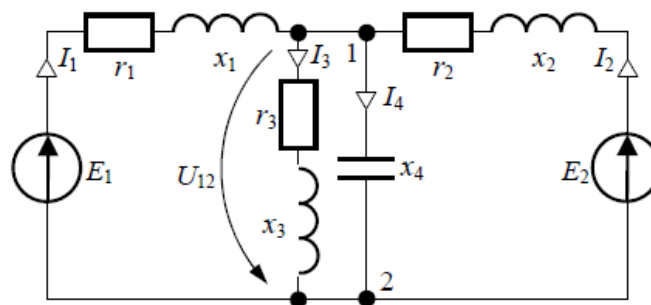


Рис. 2.3

Фазні ЕРС розрахуємо відповідно до заданої лінійної напруги на початку ліній електропередачі

$$E_1 = E_2 = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = \frac{6300}{\sqrt{3}} = 3638 \text{ В}$$

Оскільки ці ЕРС при паралельній роботі ліній зфазовані, то початкові фази у них однакові для відповідних фаз. Прийmemo $\psi_{e1} = \psi_{e2} = 0$ тоді комплекси ЕРС $\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = 3638 \text{ В}$.

Комплексні опори ЛЕП на фазу

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 0.5 + j0.3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = 0.4 + j0.6 \text{ Ом}.$$

Параметри приєднань розрахуємо за номінальними даними.

Для приєднання 3 маємо $P_n = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi_n$, звідки

$$I_n = \frac{P_n}{\sqrt{3}U_n \cos \varphi_n} = \frac{4000}{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 0.8} = 481 \text{ А},$$

повний опір фази при з'єднанні навантаження в зірку

$$\underline{Z}_3 = \frac{\left(\frac{U_n}{\sqrt{3}}\right)}{I_n} = \frac{6000}{\sqrt{3} \cdot 481} = 7.2 \text{ Ом}$$

активний опір фази навантаження

$$r_3 = \underline{Z}_3 \cos \varphi_n = 7.2 \cdot 0.8 = 5.76 \text{ Ом}$$

індуктивний опір

$$x_3 = \underline{Z}_3 \sin \varphi_n = \underline{Z}_3 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_n} = 7.2 \cdot \sqrt{1 - 0.8^2} = 4.32 \text{ Ом}$$

комплексний опір

$$\underline{Z}_3 = r_3 + jx_3 = 5.76 + j4.32 = 7.2e^{j36.87^\circ} \text{ Ом}$$

Для батареї конденсаторів $Q_n = 3I_{4n}^2 x_4 = \sqrt{3}U_n I_{4n}$, звідки

$$I_{4n} = \frac{Q_n}{\sqrt{3}U_n} = \frac{2500}{\sqrt{3} \cdot 6} = 240.6 \text{ А},$$

$$x_4 = \frac{\left(\frac{U_n}{\sqrt{3}}\right)}{I_{4n}} = \frac{600}{\sqrt{3} \cdot 240.6} = 14.4 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_4 = -jx_4 = -j14.4 \text{ Ом}$$

Розрахунок схеми рис. 2.3 виконаємо методом вузлової напруги.

$$\dot{U}_{12} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{Z_1} + \frac{\dot{E}_2}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}} = 3638 \cdot \frac{\frac{1}{0.5 + j0.3} + \frac{1}{0.4 + j0.6}}{\frac{1}{0.5 + j0.3} + \frac{1}{0.4 + j0.6} + \frac{1}{5.76 + j4.32} + \frac{1}{-j14.4}} =$$

$$= 3530 - j75.8 = 3531e^{-j1.18^\circ} \text{ В}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{12}}{Z_1} = \frac{3638 - 3530 + j72.8}{0.5 + j0.3} = 223.1 + j11.77 = 223.4e^{j3.02^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{12}}{Z_2} = \frac{3638 - 3530 + j72.8}{0.4 + j0.6} = 166.8 - j65.5 = 180.3e^{-j22.23^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_3} = \frac{3530 - j72.8}{5.76 + j4.32} = 386.2 - j302.2 = 490.4e^{-j38.05^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{12}}{Z_4} = \frac{3530 - j72.8}{-j14.4} = 5 + j245 = 245.1e^{j88.1^\circ} \text{ А}.$$

Лінійна напруга на шинах підстанції

$$\dot{U}_{Л12} = \sqrt{3}\dot{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot 3531 = 6115 \text{ В} = 6,115 \text{ кВ}$$

Струми ліній $I_1 = 223.4 \text{ А}; I_2 = 180,3 \text{ А}.$

Комплексні потужності джерел живлення (на вході ЛЕП)

$$\tilde{S}_1 = 3\dot{E}_1 \cdot \dot{I}_1^* = 3 \cdot 3638 \cdot 223.4e^{-j3.02^\circ} = 2435 - j128.5 \text{ кВА};$$

$$\tilde{S}_2 = 3\dot{E}_2 \cdot \dot{I}_2^* = 3 \cdot 3638 \cdot 180.3e^{j22.23^\circ} = 1685 - j747,5 \text{ кВА}.$$

Звідки

$$P_1 = 2435 \text{ кВт}, Q_1 = -128,5 \text{ кВАр}, S_1 = 2438 \text{ кВА};$$

$$P_2 = 1685 \text{ кВт}, Q_2 = 747,5 \text{ кВАр}, S_2 = 1843 \text{ кВА}.$$

Практичне заняття 3.
Розрахунок несиметричного трифазного кола при
з'єднанні споживачів "зіркою" чи "трикутником"

ЗАДАЧА 3.1. Визначити струми у чотирипровідному колі (рис. 3.1,а) і напруги на фазах несиметричного приймача, який увімкнений в симетричну трифазну мережу з напругою $U = 380 \text{ В}$, якщо $r = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 44 \text{ Ом}$.

Знайти активну і реактивну потужності несиметричного приймача, побудувати векторну діаграму.

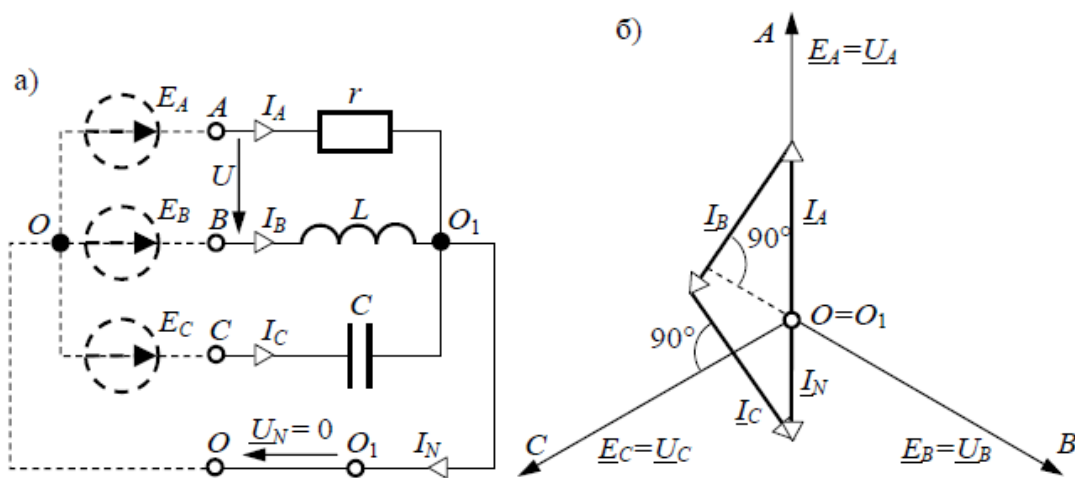


Рис. 3.1

Розв'язання

За умовчанням вважаємо, що фази симетричного генератора з'єднані у зірку з виведеною нульовою точкою O (на рис. 3.1,а показано штриховими лініями). Оскільки опір нульового проводу $Z_N = 0$, то потенціали

$$\phi_0 = \phi_{01} \text{ і } \dot{U}_N = \phi_0 - \phi_{01} = 0.$$

У цьому випадку фазні напруги несиметричного приймача дорівнюють фазним ЕРС симетричного генератора $\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = \dot{E}_A$, аналогічно $\dot{U}_B = \dot{E}_B$, $\dot{U}_C = \dot{E}_C$.

$$\text{Фазна ЕРС } E = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$$

Прийнявши $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$, отримаємо $\dot{E}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В}$.

Комплексні опори фаз $\underline{Z}_A = r \text{ Ом}; \underline{Z}_B = j\omega L \text{ Ом}; \underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} \text{ Ом}..$

За законом Ома струми

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{44} = 5 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{220e^{-j120^\circ}}{44e^{j90^\circ}} = 5e^{-j210^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{220e^{j120^\circ}}{44e^{-j90^\circ}} = 5e^{j210^\circ} \text{ А},$$

а за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 5 \cdot (1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ}) = 5 \cdot (1 - \sqrt{3}) = -3.64 \text{ А}.$$

Активна потужність приймача

$$P = P_A + P_B + P_C = \sum_{n=1}^3 I_n^2 r_n = I_A^2 r = 5^2 \cdot 44 = 1100 \text{ Вт}.$$

Реактивна потужність також визначається як алгебрична сума потужностей трьох фаз приймача

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = \sum_{n=1}^3 I_n^2 x_n = I_B^2 \cdot \omega L - I_C^2 \cdot \frac{1}{\omega C} = 5^2 \cdot 44 - 5^2 \cdot 44 = 0 \text{ ВАр}.$$

Векторна діаграма кола подана на рис. 3.1,б.

ЗАДАЧА 3.2. Розв'язати задачу 3.1 при розімкненому нульовому проводі.

Розв'язання

Наведемо розрахункову схему установки (рис. 3.2,а).

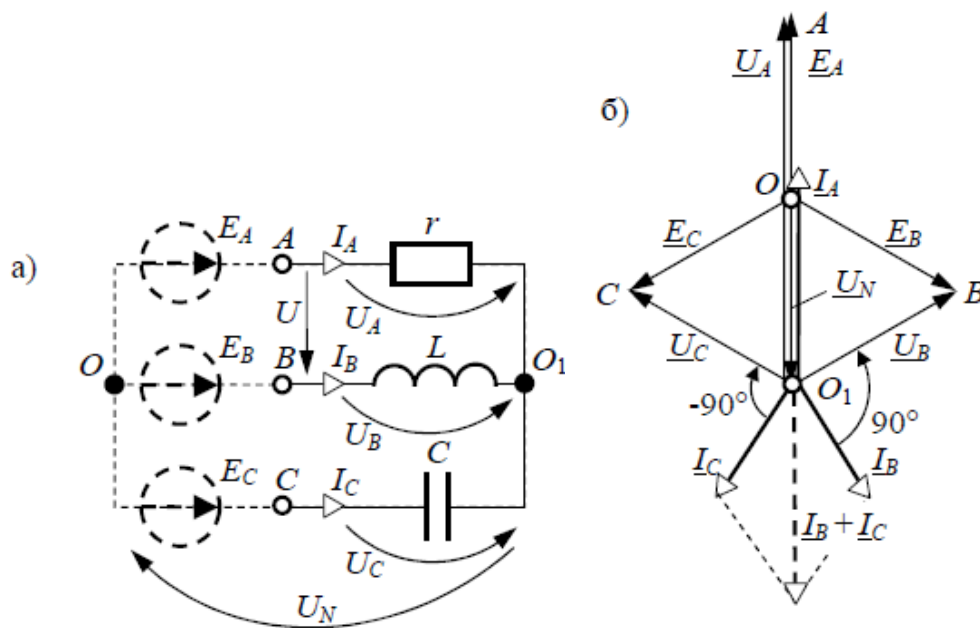


Рис. 3.2

Розрахуємо вузлову напругу (напруга зміщення нейтралі)

$$\dot{U}_N = \frac{\frac{\dot{E}_A}{Z_A} + \frac{\dot{E}_B}{Z_B} + \frac{\dot{E}_C}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}} = 220 \cdot \left(1 + e^{-j210^\circ} + e^{j210^\circ}\right) = -160V$$

Фазні напруги приймача

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{E}_A - \dot{U}_N = 220 + 160 = 380V, & U_A &= 380V, \\ \dot{U}_B &= \dot{E}_B - \dot{U}_N = 220e^{-j120^\circ} - 160 = 50 - j190 = B, & U_B &= 50 - j190 = B, \\ \dot{U}_C &= \dot{E}_C - \dot{U}_N = 220e^{j120^\circ} - 160 = 50 + j190 = B. & U_C &= 50 + j190 = B. \end{aligned}$$

Фазні струми приймача дорівнюють лінійним

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{Z_A} = \frac{380}{44} = 8.64A; & \dot{I}_A &= 8.64A; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B}{Z_B} = \frac{50 - j190}{j44} = -4.32 - j1.14A; & \dot{I}_B &= 4.47A; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C}{Z_C} = \frac{50 + j190}{-j44} = -4.32 + j1.14A. & \dot{I}_C &= 4.47A. \end{aligned}$$

Перевірка здійснюється за першим законом Кірхгофа: $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, що виконується.

Активна потужність приймача

$$P = P_A + P_B + P_C = \sum_{n=1}^3 P_n = \sum_{n=1}^3 I_n^2 r_n = I_A^2 r = 8.64^2 \cdot 44 = 3285 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = \sum_{n=1}^3 Q_n = \sum_{n=1}^3 I_n^2 x_n = I_B^2 \cdot \omega L - I_C^2 \cdot \frac{1}{\omega C} = 4.47^2 \cdot 44 - 4.47^2 \cdot 44 = 0 \text{ Вар.}$$

ЗАДАЧА 3.3. Розрахувати струми несиметричного трикутника (рис. 3.3,а), побудувати векторну діаграму, якщо $U = 380 \text{ В}$, $r = x_C = 100 \text{ Ом}$, $x_L = 100\sqrt{2} \text{ Ом}$.

Знайти покази ватметрів, порівняти їх з активною потужністю приймача.

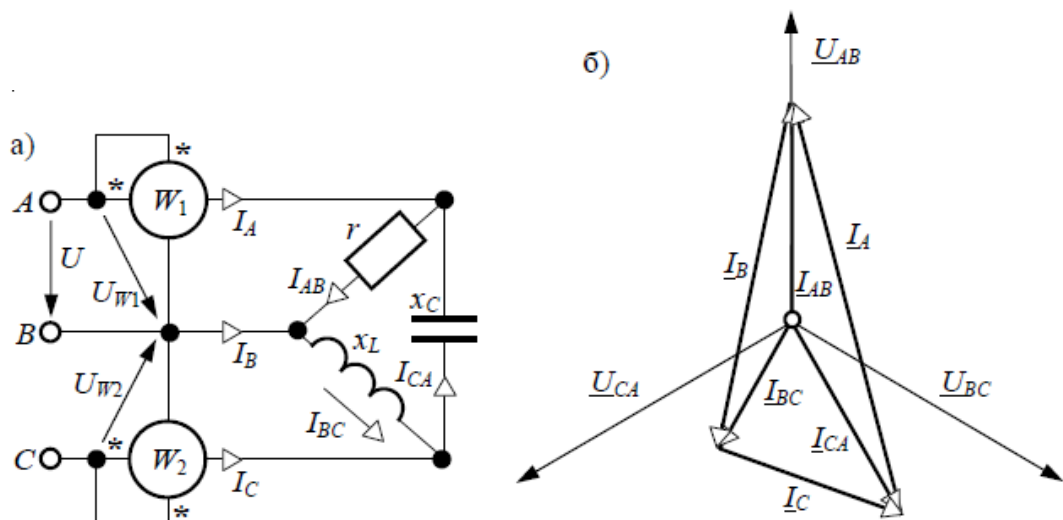


Рис. 3.3

Розв'язання

При увімкненні трикутника опорів до трифазного генератора лінійна напруга генератора дорівнює фазній напрузі навантаження.

Прийmemo $\dot{U}_{AB} = 380 \text{ В}$, тоді $\dot{U}_{BC} = 380e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{U}_{CA} = 380e^{j120^\circ} \text{ В}$.

За законом Ома знаходимо фазні струми трикутника

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{380}{100} = 3.8 A; & \dot{I}_{AB} &= 3.8 A; \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{380e^{-j120^\circ}}{100\sqrt{2}e^{j90^\circ}} = 1.9\sqrt{2}e^{-j210^\circ} A; & \dot{I}_{BC} &= 1.9\sqrt{2}e^{-j210^\circ} A; \\ \dot{I}_{CA} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{380e^{j120^\circ}}{100e^{-j90^\circ}} = 3.8e^{j210^\circ} A. & \dot{I}_{CA} &= 3.8e^{j210^\circ} A. \end{aligned}$$

Лінійні струми знаходимо за першим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 3.8 - 3.8e^{j210^\circ} = 3.8 + 3.3 + j1.9 = 7.35e^{j15^\circ} A; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 1.9\sqrt{2}e^{-j210^\circ} - 3.8 = -6.28e^{-j12.33^\circ} A; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 3.8e^{j210^\circ} - 1.9\sqrt{2}e^{-j210^\circ} = -3.38e^{j73.33^\circ} A. \end{aligned}$$

Векторна діаграма трикутника опорів подана на рис. 3.3,б.

Покази ватметрів

$$\begin{aligned} P_{W1} &= \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[380 \cdot 7.35e^{-j15^\circ} \right] = 2698 \text{ Вт}; \\ P_{W2} &= \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{CB} \cdot \dot{I}_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[-380e^{-j120^\circ} \cdot \left(-3.38e^{-j73.33^\circ} \right) \right] = -1250 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Активна потужність несиметричного приймача

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = I_{AB}^2 r = 3.8^2 \cdot 100 = 1444 \text{ Вт}.$$

Сума показів двох ватметрів схеми рис. 3.3,а

$$P_{W1} + P_{W2} = 2698 - 1250 = 1448 \text{ Вт} = P.$$

Таким чином, наведена схема увімкнення двох ватметрів є схемою виміру активної потужності в трифазному трипровідному колі. Розбіжність у четвертому знаку результатів є наслідком округлення чисел.

ЗАДАЧА 3.4. До трифазної мережі з лінійною напругою $U = 220 \text{ В}$ і опорами $r_l = 3 \text{ Ом}$ та $x_l = 4 \text{ Ом}$ під'єднано коло з опорами $r = x_C = x_L = 20 \text{ Ом}$ (рис. 3.4).

Виконати розрахунок струмів у колі, показів ватметрів та побудувати векторну діаграму для випадку короткого замикання між фазними точками a - c приймача.

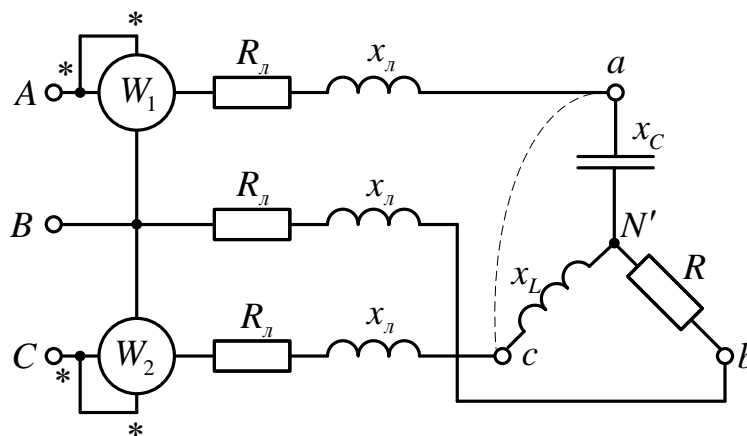


Рис. 3.4

Розв'язання

Пам'ятаємо, що фазна напруга пов'язана з лінійною співвідношенням

$$U_{\phi} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В.}$$

Прийнявши $\dot{U}_A = 127 \text{ В}$, отримаємо $\dot{U}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{U}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В}$.

Тоді система комплексів лінійних напруг генератора

$$\dot{U}_{AB} = 220e^{j30^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{BC} = 220e^{-j90^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{CA} = 220e^{j150^\circ} \text{ В.}$$

У результаті короткого замикання утворюється нова точка (вузол) N'' і схема набуває вигляду поданого на рис. 3.5.

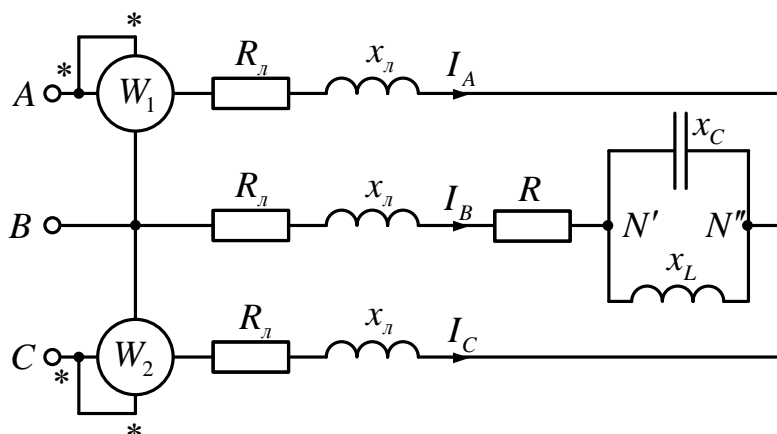


Рис. 3.5

У коливальному контурі між точками $N' - N''$ має місце резонанс струмів, як результат рівності провідностей елементів контуру

$$b_L = b_C = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ См. Еквівалентний опір цього контуру}$$

$$x_{\text{екв}} = \frac{1}{b_L - b_C} = \infty, \text{ звідки випливає}$$

$$\dot{I}_B = 0;$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{I}_B (R_L + R + jx_L) = 0;$$

$$\dot{\Phi}_B = \dot{\Phi}_{N'}.$$

Оскільки струм у фазі B не протікає, то за законом Ома для замкненого контуру

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{CA}}{2 \cdot (R_L + jx_L)} = \frac{220e^{j150^\circ}}{2 \cdot (3 + j4)} = \frac{220e^{j150^\circ}}{2 \cdot 5e^{j53^\circ}} = 22e^{j97^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_A = 22e^{-j83^\circ} \text{ А.}$$

Обчислимо напругу на опорах лінійних проводів:

$$\dot{U}_{AN''} = \dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A (R_L + jx_L) = 22e^{-j83^\circ} \cdot 5e^{j53^\circ} = 110e^{-j30^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{BN'} = \dot{I}_B (R_L + jx_L) = 0,$$

$$\dot{U}_{CN''} = \dot{U}_{Aa} = \dot{I}_A (R_L + jx_L) = 22e^{j97^\circ} \cdot 5e^{j53^\circ} = 110e^{-j150^\circ} \text{ В.}$$

Розраховуємо напругу $\dot{U}_{N'N''}$, яка утворюється після короткого замикання, склавши рівняння за другим законом Кірхгофа для верхнього контуру:

$$\dot{U}_{AN''} - \dot{U}_{N'N''} - \dot{U}_{AB} = 0, \text{ звідки}$$

$$\dot{U}_{N'N''} = \dot{U}_{AN''} - \dot{U}_{AB} = 110e^{-j30^\circ} - 220e^{j30^\circ} =$$

$$= 95 - j55 - 190 - j110 = -95 - j165 = 190e^{j240^\circ} = 190e^{-j120^\circ} \text{ В.}$$

Обчислюємо струми у паралельних гілках коливального контуру:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{N'N''}}{\underline{Z}_L} = \frac{190e^{-j120^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 9.5e^{j150^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_L = 9.5e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Покази ватметрів

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AB} \cdot I_A^* \right] = \operatorname{Re} \left[220e^{j30^\circ} \cdot 22e^{j83^\circ} \right] = -1890 \text{ Вт};$$

$$P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{CB} \cdot I_C^* \right] = \operatorname{Re} \left[220e^{j90^\circ} \cdot 22e^{-j97^\circ} \right] = 4804 \text{ Вт}.$$

При визначення P_{W2} взята напруга $\dot{U}_{CB} = -\dot{U}_{BC}$, оскільки початок паралельної обмотки другого ватметра, позначений на схемі (*), під'єднаний до точки С.

Топографічна діаграма кола зображена на рис. 3.6.

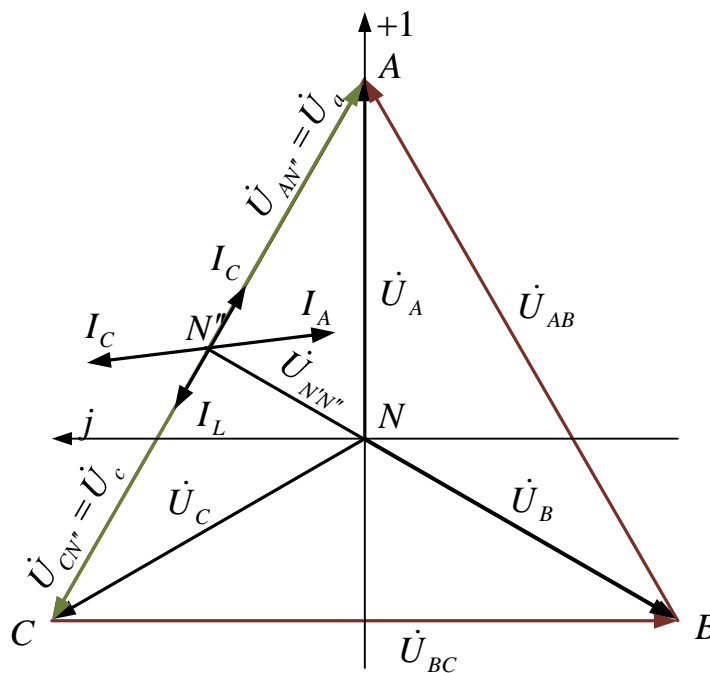


Рис. 3.5

Практичне заняття 4.

Розрахунок трифазних кіл з різними видами з'єднання фаз

ЗАДАЧА 4.1. Трифазне коло (рис. 4.1) увімкнене до симетричного

генератора з напругою $U = 660 \text{ В}$. Параметри кола $r = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 10 \text{ Ом}$,

$$r_1 = \omega L_1 = 5 \text{ Ом}.$$

Розрахувати лінійні і фазні струми всіх ділянок кола.

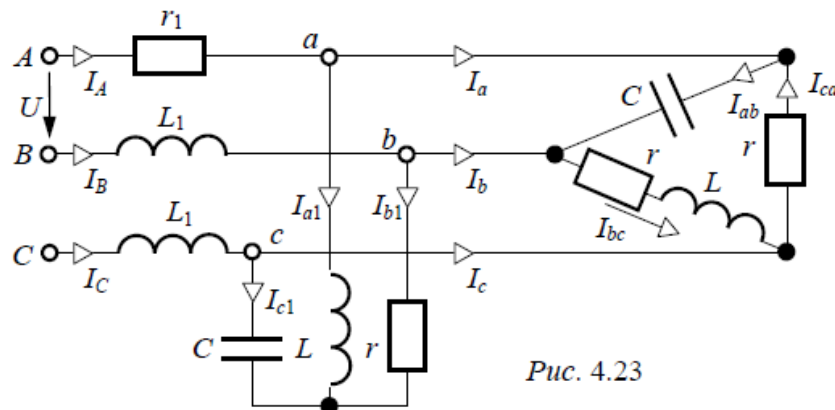


Рис. 4.1

Розв'язання

Спростимо схему за допомогою еквівалентних перетворень. Спочатку несиметричну зірку замінимо еквівалентним трикутником опорів:

$$\underline{Z}_{ab1} = r + j\omega L + \frac{r \cdot (j\omega L)}{-j \frac{1}{\omega C}} = 10 + j10 + \frac{10 \cdot (j10)}{-j10} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{bc1} = r - j \frac{1}{\omega C} + \frac{r \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{j\omega L} = 10 - j10 + \frac{10 \cdot (-j10)}{j10} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{ca1} = j\omega L - j \frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{r} = j10 - j10 + \frac{j10 \cdot (-j10)}{10} = 10 \text{ Ом}.$$

Далі два трикутники опорів виявляються увімкненими паралельно (рис. 4.2,а).

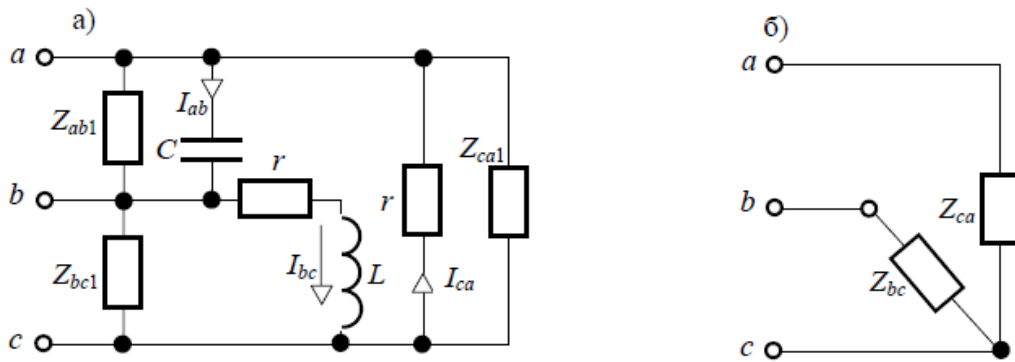


Рис. 4.2

Ці два трикутники можна замінити одним з опорами фаз

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_{ab1} \cdot \left(-j \frac{1}{\omega C}\right)}{\underline{Z}_{ab1} - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{j10 \cdot (-j10)}{j10 - j10} = \infty \quad \text{— таким чином в цьому паралельному}$$

контурі без втрат спостерігається резонанс струмів у результаті якого вхідний опір цього контура нескінченно великий;

$$\underline{Z}_{bc} = \frac{\underline{Z}_{bc1} \cdot (r + j\omega L)}{\underline{Z}_{bc1} + r + j\omega L} = \frac{-j10 \cdot (10 + j10)}{-j10 + 10 + j10} = 10 - j10 \quad \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{ca} = \frac{\underline{Z}_{ca1} \cdot r}{\underline{Z}_{ca1} + r} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \quad \text{Ом}.$$

В результаті одержуємо схему заміщення навантаження, увімкненого на затискачі a - b - c , яка представлена на рис. 4.2,б.

Уявимо, що обмотки симетричного трифазного джерела ЕРС сполучені в зірку з ЕРС. Фазна ЕРС $E = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{660}{\sqrt{3}} = 380 \text{ В}$.

Прийнявши $\dot{E}_A = 380 \text{ В}$, отримаємо $\dot{E}_B = 380e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{E}_C = 380e^{j120^\circ} \text{ В}$.

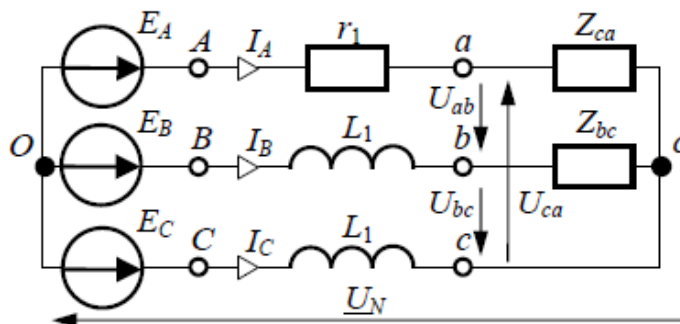


Рис. 4.3

Отримуємо перетворену схему заміщення, зображену на рис. 4.3, для якої напруга зміщення нейтралі

$$\dot{U}_N = \frac{\frac{\dot{E}_A}{r_1 + \underline{Z}_{ca}} + \frac{\dot{E}_B}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} + \frac{\dot{E}_C}{j\omega L_1}}{\frac{1}{r_1 + \underline{Z}_{ca}} + \frac{1}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} + \frac{1}{j\omega L_1}} = \frac{\frac{380}{5+5} + \frac{380e^{-j120^\circ}}{j5+10-j10} + \frac{380e^{j120^\circ}}{j5}}{\frac{1}{5+5} + \frac{1}{j5+10-j10} + \frac{1}{j5}} = 200 + j225V$$

Лінійні струми генератора

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{r_1 + \underline{Z}_{ca}} = \frac{380 - 200 - j225}{5 + 5} = 18 - j22.5 \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_N}{j\omega L_1 + \underline{Z}_{bc}} = \frac{-190 - j330 - 200 - j225}{j5 + 10 - j10} = -39 - j55.5 \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_N}{j\omega L_1} = \frac{-190 + j330 - 200 - j225}{j5} = 21 + j78 \text{ A}.$$

Лінійна напруга на затискачах приймачів на підставі схеми рис. 4.3:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_A \underline{Z}_{ca} - \dot{I}_B \underline{Z}_{bc} = (18 - j22.5) \cdot 5 - (-39 - j55.5) \cdot (10 - j10) = 1035 + j52.5V;$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{I}_B \underline{Z}_{bc} = (-39 - j55.5) \cdot (10 - j10) = -945 - j165V;$$

$$\dot{U}_{ca} = -\dot{I}_A \underline{Z}_{ca} = (18 - j22.5) \cdot 5 = -90 + 112.5V.$$

Повертаємося до первинної схеми рис. 4.1 і знаходимо фазні струми трикутника

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{-j \frac{1}{\omega C}} = \frac{1035 + j52.5}{-j10} = -5.25 + j103.5A;$$

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{r + j\omega L} = \frac{-945 - j165}{10 + j10} = -55.5 + j39A;$$

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{r} = \frac{-90 + 112.5}{10} = -9 + j11.25A.$$

Лінійні струми трикутника

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} = (-5.25 + j103.5) - (-9 + j11.25) = 3.75 + j92.25A;$$

$$\dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} = (-55.5 + j39) - (-5.25 + j103.5) = -50.25 - j64.5A;$$

$$\dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} = (-9 + j11.25) - (-55.5 + j39) = 46.5 - j27.75A.$$

Струми приймача, з'єднаного в зірку, розрахуємо за першим законом

Кірхгофа:

$$\dot{I}_{a1} = \dot{I}_A - \dot{I}_a = 14.25 - j114.75 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{b1} = \dot{I}_B - \dot{I}_b = 11.25 + j9 \text{ A};$$

$$\dot{I}_{c1} = \dot{I}_C - \dot{I}_c = -56.5 + j105.75 \text{ A}.$$

Практичне заняття 5.

Особливі випадки несиметрії в трифазних колах

ЗАДАЧА 5.1. Для симетричної трифазної системи «зірка-зірка без нульового проводу» (рис. 5.1,а) розрахувати режими роботи для наступних випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу A ;
- коротке замикання фази A .

Параметри схеми: $U = 380 \text{ В}$, $r = x = 20 \text{ Ом}$.

Розв'язання

На рис. 5.1,б наведена векторна діаграма симетричного режиму системи $Y-Y$. При цьому напруга між нульовими точками симетричної системи $U_N = 0$.

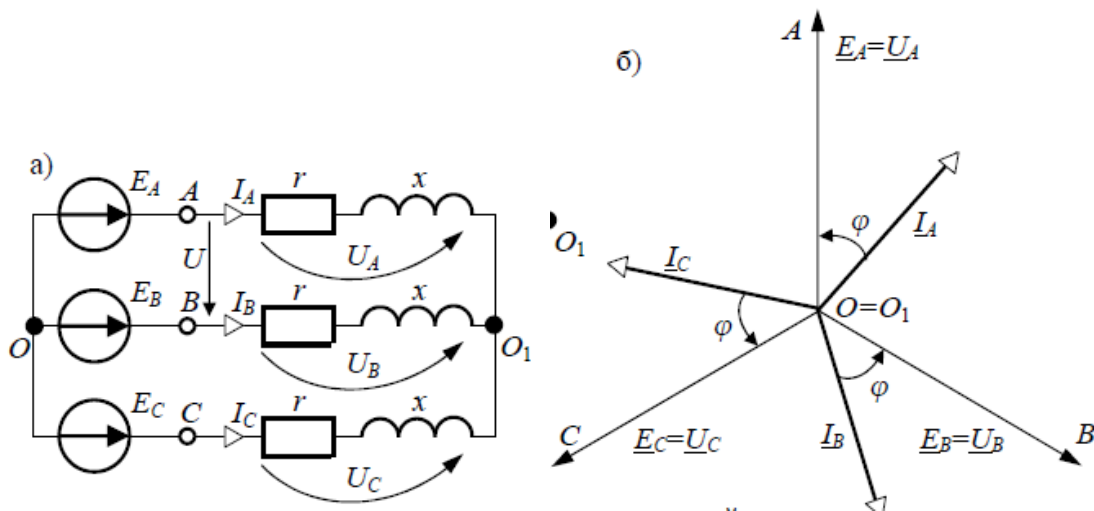


Рис. 5.1.

Фазні ЕРС генератора і фазні напруги приймача

$$\dot{E}_A = \dot{U}_A = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}.$$

$$\dot{E}_B = \dot{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{E}_C = \dot{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В},$$

а також струми

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{220}{20 + j20} = 7.78e^{-j45^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 7.78e^{-j165^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 7.78e^{j75^\circ} \text{ A}$$

утворюють симетричні системи векторів.

При **обриві лінійного проводу A** послідовно з опором цієї фази $\underline{Z} = r + jx = 20 + j20 \text{ Ом}$ можна вважати увімкненим додатковий опір обриву $\underline{Z}_{обр} = \infty$, при цьому опір вітки A стає рівним $\underline{Z}_A = \underline{Z} + \underline{Z}_{обр} = \infty$, який на схемі заміщення моделюється розривом.

Напряга зміщення нейтралі

$$\dot{U}_N = \frac{\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}} + \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}}} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}}(\dot{E}_B + \dot{E}_C)}{\frac{2}{\underline{Z}}} = -\frac{\dot{E}_A}{2} = -\frac{220}{2} = -110 \text{ В}.$$

При підрахунку враховано, що при обриві проводу A провідність $\frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{\infty} = 0$, тому відношення $\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\dot{E}_A}{\infty} = 0$, і в симетричній системі

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0, \text{ звідки } -\dot{E}_A = \dot{E}_B + \dot{E}_C.$$

Напряга на опорі \underline{Z}_A

$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N = 1.5\dot{E}_A = 330 \text{ В}$ є напругою між точками обриву проводу A, а струм обірваного проводу

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}_A}{\infty} = 0$$

Напряга і струми неушкоджених фаз

$$\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N = 220e^{-j120^\circ} + 110 = -j190 \text{ В}, \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = \frac{-j190}{20 + j20} = 6.72e^{-j135^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N = 220e^{j120^\circ} + 110 = j190 \text{ В}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = \frac{j190}{20 + j20} = 6.72e^{j45^\circ} \text{ А}.$$

Відмітимо, що при обриві лінійного проводу трифазне коло перетворюється на однофазне, тому струм неушкоджених фаз можна знайти й простіше:

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{BC}}{2\underline{Z}} = \frac{\dot{E}_B - \dot{E}_C}{2\underline{Z}}.$$

Векторна діаграма даної системи $Y-Y$ без нульового проводу при обриві лінійного проводу A подана на рис. 5.2,а.

Порівнюючи напруги і струми неушкоджених фаз при обриві проводу A ($U_B = U_C = 190 \text{ В}$) і при роботі в симетричному режимі, коли усі напруги $U_A = U_B = U_C = 220 \text{ В}$, відзначаємо їх зменшення на 13,7%, що неприпустимо для живлення освітлювального навантаження.

Розрахунок схеми при **короткому замиканні фази A** здійснюється за загальним підходом до розрахунку розгалуженого кола з виконанням граничного переходу при $\underline{Z}_A \rightarrow 0$:

$$\dot{U}_N = \frac{\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}} + \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}}}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}}} = \lim_{\underline{Z}_A \rightarrow 0} \frac{\frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}_A}}{\frac{1}{\underline{Z}_A}} = \dot{E}_A$$

Напруга і струми неушкоджених фаз

$$\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N = \dot{E}_B - \dot{E}_A = -\dot{U}_{AB} = -380e^{j30^\circ} = 380e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = \frac{380e^{-j150^\circ}}{20 + j20} = 13.44e^{-j195^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N = \dot{E}_C - \dot{E}_A = \dot{U}_{CB} = 380e^{j150^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = \frac{380e^{j150^\circ}}{20 + j20} = 13.44e^{j105^\circ} \text{ А}.$$

Струм короткозамкненої фази

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{\underline{Z}_A} = \frac{0}{0} = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C) = -\sqrt{3}\dot{I}_C e^{j30^\circ} = -23.3e^{j135^\circ} = 23.3e^{-j45^\circ} \text{ А}.$$

Вираз для \dot{I}_A отримано за умови, що для трипровідної системи $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$.

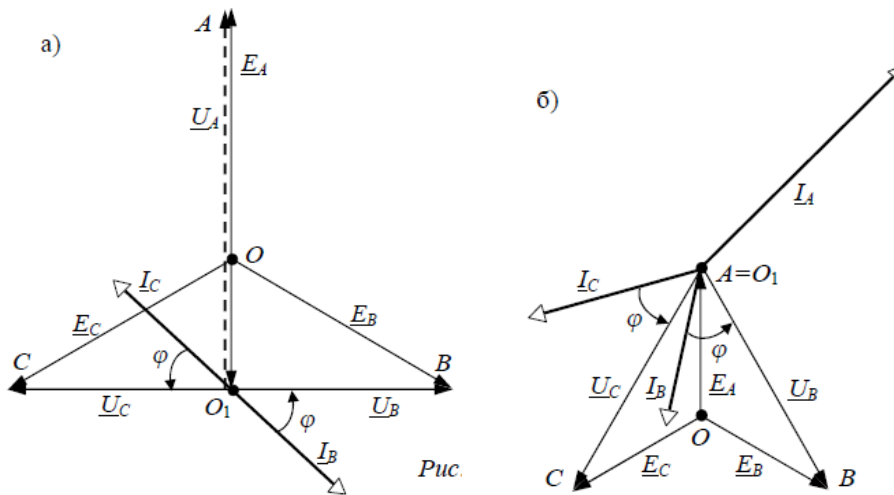


Рис. 5.2.

Векторна діаграма кола при короткому замиканні фази A наведена на рис. 5.2,б.

Відзначимо, що у порівнянні з симетричним режимом струм закороченої фази зростає у три рази, а струми інших фаз – в 3 раз.

ЗАДАЧА 5.2. Для симетричної системи «зірка-зірка з нульовим проводом» ($Z_N = 0$) (рис. 5.3,а) виконати розрахунки для трьох випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу B ;
- коротке замикання фази B , якщо: $U = 220 \text{ В}$, $Z = r = 20 \text{ Ом}$.

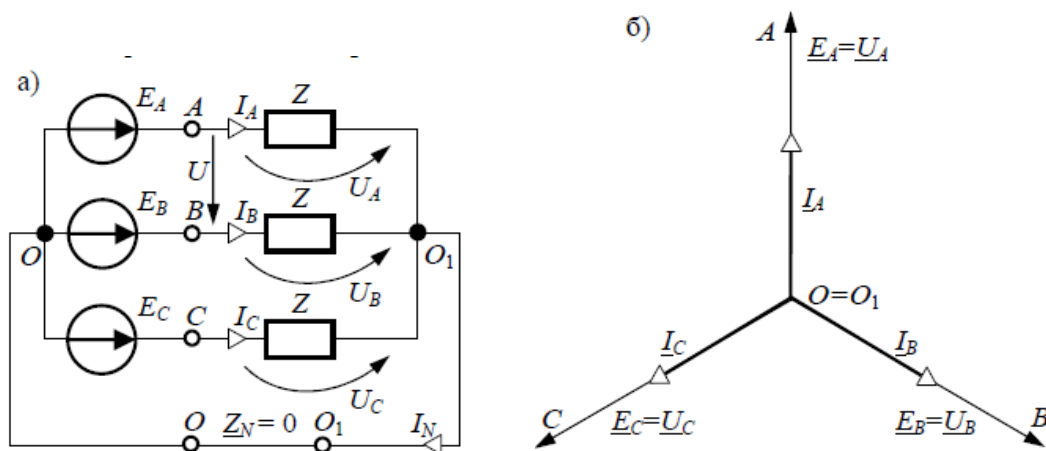


Рис. 5.3.

Розв'язання

На рис. 5.3,б наведена векторна діаграма для **симетричного режиму** роботи схеми, в якій $\dot{U}_N = 0$ із-за нульового значення опору \underline{Z}_N .

При цьому фазні напруги генератора і навантаження однакові і у $\sqrt{3}$ разів менші за лінійні напруги: $U_\phi = E = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ В}$

Прийmemo $\dot{E}_A = U = 220 \text{ В}$, тоді $\dot{E}_B = 127e^{-j120^\circ} \text{ В}$, $\dot{E}_C = 127e^{j120^\circ} \text{ В}$.

Струми у разі симетричного режиму роботи кола

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{127}{20} = 6,35 \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}} = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = 6,35 e^{-j120^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}} = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = 6,35 e^{j120^\circ} \text{ А}$$

тобто лінійний струм симетричного режиму $I_{\text{сум}} = 6,35 \text{ А}$.

При **обриві лінійного проводу В** можна вважати, що послідовно з опором \underline{Z} у фазу В додався опір обриву $\underline{Z}_{\text{обр}} = \infty$ і повний опір вітки став $\underline{Z}_B = \underline{Z} + \underline{Z}_{\text{обр}} = \infty$, який на схемі заміщення моделюється розривом.

За другим законом Кірхгофа для контурів «вітка – нульовий провід» отримуємо при обриві проводу В:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_N}{\underline{Z}} = \frac{\dot{E}_A}{\underline{Z}} = \frac{127}{20} = 6,35 \text{ А} \text{ – те ж значення, що і при симетричному}$$

режимі.

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_N}{\underline{Z}_B} = \frac{\dot{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{127}{\infty} = 0;$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_N}{\underline{Z}} = \frac{\dot{E}_C}{\underline{Z}} = \frac{127e^{j120^\circ}}{20} = 6,35e^{j120^\circ} \text{ А} \text{ – те ж значення, що і при}$$

симетричному режимі.

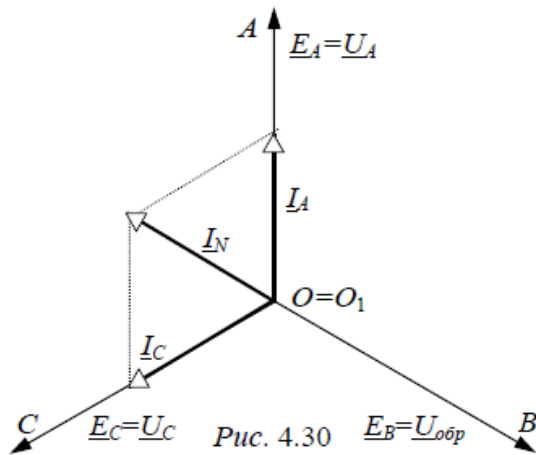


Рис. 5.4.

Струм нульового проводу

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 6.35 + 0 + 6.35e^{j120^\circ} = -6.35e^{j120^\circ} = 6.35e^{j60^\circ} \text{ A}$$

Відмітимо, що $\dot{I}_N = \dot{I}_{всум}$. Із цього приводу кажуть, що *нульовий провід сприймає на себе струм обірваної фази*. Векторна діаграма кола при обриві проводу *B* подана на рис. 5.4.

При **короткому замиканні фази B** у чотирипровідній системі струм короткозамкненого контуру $E_B-Z_B-Z_N$ необмежено зростає. Такий режим стає *аварійним*. Для захисту від такого режиму в лінійному проводі *B* (і в решті лінійних проводів) застосовуються плавкі запобіжники, які вимикають аварійну фазу (перегоряють), після чого схема переходить в режим роботи з обірваною фазою *B* (рис. 5.3).

ЗАДАЧА 5.4. Розрахувати режим роботи симетричного трикутника (рис.

5.5,а) при $U = 660 \text{ В}$, $x_C = 100 \text{ Ом}$ для чотирьох випадків:

- симетричний режим;
- обрив лінійного проводу *C*;
- обрив фази *CZ*;
- коротке замикання фази *CZ*.

Розв'язання

Прийемо $\dot{U}_{AB} = U = 660 \text{ В}$.

При з'єднанні фаз навантаження в трикутник його лінійна напруга дорівнює фазній напрузі. У **симетричному режимі** отримуємо

$$\dot{U}_{AB} = 660 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{BC} = 660e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = 660e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Фазні струми трикутника

$$\dot{i}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{660}{-j100} = 6.6e^{j90^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \dot{i}_A e^{-j120^\circ} = 6.6e^{-j30^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{i}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \dot{i}_A e^{j120^\circ} = 6.6e^{j210^\circ} \text{ А}.$$

Лінійні струми кола

$$\dot{I}_A = \dot{i}_{AB} - \dot{i}_{CA} = \sqrt{3}\dot{i}_{AB}e^{j30^\circ} = 11.4e^{j60^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{i}_A e^{-j120^\circ} = 11.4e^{-j60^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{i}_A e^{j120^\circ} = 11.4e^{j180^\circ} \text{ А}.$$

ВД симетричного трикутника подана на рис. 5.5,б.

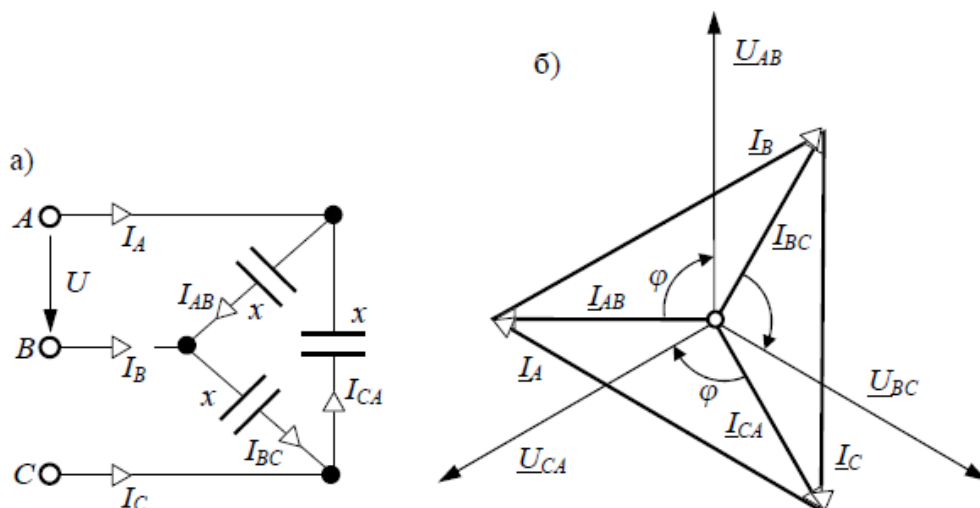


Рис. 5.5.

При **обриві лінійного проводу C** всі струми і напруга навантаження визначаються тільки лінійною напругою \dot{U}_{AB} .

Струм $\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{660}{-j100} = 6.6e^{j90^\circ} A$ – саме такий, як і у симетричному

режимі.

Струм $I_C = 0$, тому що провід C обірваний,

струми $\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{CA} = -\frac{\dot{U}_{AB}}{2\underline{Z}} = -\frac{\dot{I}_{AB}}{2} = 3.3e^{-j90^\circ} A$,

напруги на фазах $\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{CA} = \dot{I}_{BC}\underline{Z} = -\frac{\dot{U}_{AB}}{2} = -330 V$.

Лінійні струми

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 1.5\dot{I}_{AB} = j9.9 A;$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = -1.5\dot{I}_{AB} = -j9.9 A.$$

ВД трикутника опорів при обриві лінійного проводу C наведена на рис. 5.6,а.

При **обриві фази CZ** її струм $\dot{I}_{CA} = 0$, а струми фаз $\dot{I}_{AB} = 6.6e^{j90^\circ} A$, $\dot{I}_{BC} = 6.6e^{-j30^\circ} A$ такі ж, як і в симетричному режимі.

Лінійні струми

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} = j6.6 A;$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 11.4e^{-j60^\circ} A;$$

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_{BC} = 6.6e^{j150^\circ} A.$$

Векторна діаграма кола при обриві фази CZ подана на рис. 5.6,б.

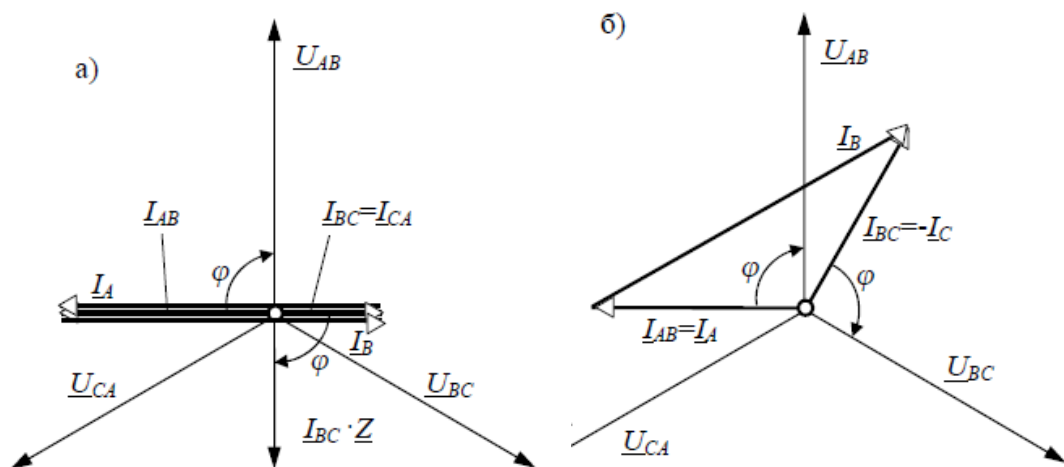


Рис. 5.6.

При короткому замиканні фази CZ у контурі « A – короткозамкнена фаза $CZ - B$ – джерело живлення» немає опорів, і струм необмежено зростає, створюючи аварійний режим роботи, що вимагає відключення від мережі проводу A або C .

ЗАДАЧА 5.5.

Розрахувати покази амперметрів A_4 , A_5 , A_6 у лінійних проводах кола (рис. 5.7), якщо амперметри A_1 , A_2 , A_3 у фазах реєструють по 2 А.

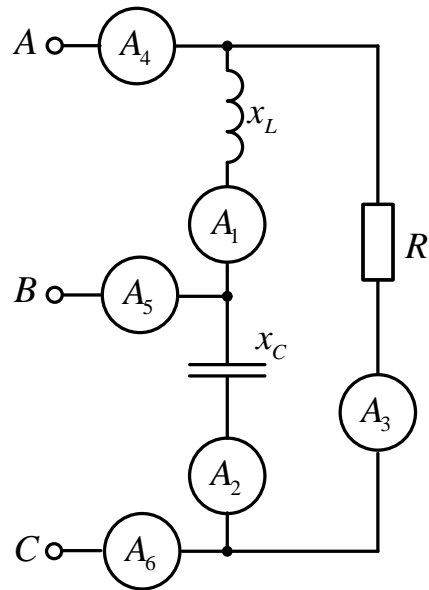


Рис. 5.7

Розв'язання

Запишемо систему комплексних фазних напруг трифазного споживача:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} = U_{\text{Л}} e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC} = U_{\text{Л}} e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA} = U_{\text{Л}} e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Практичне заняття 6.

Розрахунок трифазного кола методом симетричних складових

Суть методу полягає в представленні несиметричної системи векторів \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} у вигляді суми трьох симетричних систем: прямої \underline{A}_1 , \underline{B}_1 , \underline{C}_1 , що має таку ж послідовність, як і первинні вектори, зворотної \underline{A}_2 , \underline{B}_2 , \underline{C}_2 , що має протилежну послідовність, і нульової послідовності, що складається з трьох однакових за величиною і напрямом векторів $\underline{A}_0 = \underline{B}_0 = \underline{C}_0$.

Визначення симетричних складових проводиться за формулами:

$$\begin{aligned}\underline{A}_0 &= \frac{\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}}{3}; \\ \underline{A}_1 &= \frac{\underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C}}{3}; \\ \underline{A}_2 &= \frac{\underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C}}{3}.\end{aligned}$$

де $a = e^{j120^\circ}$ – поворотний (фазний) множник.

Опори приймача струмам різних послідовностей називаються опорами прямої \underline{Z}_1 , зворотної \underline{Z}_2 та нульової \underline{Z}_0 послідовностей. Для симетричної схеми Y–Y вони мають значення

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}, \quad \underline{Z}_0 = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N$$

де \underline{Z} – опір фази приймача, \underline{Z}_N – опір нейтралі.

Для асинхронного двигуна характерне таке співвідношення:

$$\underline{Z}_1 \gg \underline{Z}_0 \gg \underline{Z}_2.$$

Розрахунок симетричних кіл з несиметричним джерелом складається з трьох етапів:

- розкладання заданої несиметричної системи на симетричні складові;
- розрахунок струмів кожної з послідовностей окремо;
- підсумовування струмів всіх послідовностей.

Розрахунок аварійних режимів (к.з., обрив фази) симетричних кіл проводиться таким чином:

- у місці аварії вводяться системи трьох несиметричних напруг $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ і трьох несиметричних струмів $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$. Кожна з цих систем розкладається на симетричні складові $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$ та $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$.
- далі розглядаються схеми прямої, зворотної і нульової послідовностей, для кожної з яких складаються рівняння, що зв'язують \dot{U}_1 з \dot{I}_1 , \dot{U}_2 з \dot{I}_2 і \dot{U}_0 з \dot{I}_0 . Ще три рівняння складаються для аварійної ділянки, тож їх вигляд визначається типом аварії.
- розв'язання цих рівнянь дає $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$ та $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0$, через які можуть бути визначені всі величини, що цікавлять нас.

ЗАДАЧА 6.1. Під час з'єднання вторинних обмоток силового трифазного трансформатора невірно були визначені початок і кінець обмотки B - Y . В результаті з'єднання обмоток у зірку (рис. 6.1,а) система ЕРС набула вигляду рис. 6.1,б.

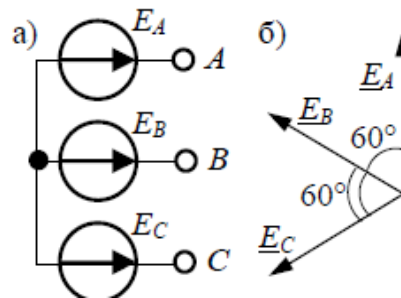


Рис. 6.1

Знайти симетричні складові представленої несиметричної системи, якщо $E_A = E_B = E_C = 220 \text{ В}$.

Розв'язання

Прийmemo $\dot{E}_A = 220 \text{ В}$ (рис. 4.33б), тоді $\dot{E}_B = 220e^{j60^\circ} \text{ В}$, $\dot{E}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В}$.

Складова нульової послідовності

$$\dot{E}_0 = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3} = \frac{220 + 220e^{j60^\circ} + 220e^{j120^\circ}}{3} = 146.7e^{j60^\circ} \text{ В}$$

Складова прямої послідовності

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C}{3} = \frac{220 + 220e^{j60^\circ} \cdot e^{j120^\circ} + 220e^{j120^\circ} \cdot e^{-j120^\circ}}{3} = 73.33V.$$

Складова зворотної послідовності

$$\dot{E}_2 = \frac{\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C}{3} = \frac{220 + 220e^{j60^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 220e^{j120^\circ} \cdot e^{j120^\circ}}{3} = 146.7e^{-j60^\circ} V.$$

Перевіримо результат розкладання векторів на симетричні складові:

$$\dot{E}_A = \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = 146.7e^{j60^\circ} + 73.33 + 146.7e^{-j60^\circ} = 220V;$$

$$\dot{E}_B = \dot{E}_0 + a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2 = 146.7e^{j60^\circ} + 73.33 \cdot e^{-j120^\circ} + 146.7e^{-j60^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 220e^{j60^\circ} V;$$

$$\dot{E}_C = \dot{E}_0 + a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2 = 146.7e^{j60^\circ} + 73.33 \cdot e^{j120^\circ} + 146.7e^{-j60^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 220e^{j120^\circ} V.$$

Примітка. Оскільки сталося так, що $E_2 > E_1$, то це означає, що позитивний напрям обертання векторів на комплексній площині змінюється на протилежний, тобто фактично зворотна послідовність стає прямою, а пряма – зворотною. На практиці це означає, що зміниться напрям обертання двигунів.

ЗАДАЧА 6.2. Із-за нерівномірного навантаження в кінці трифазної трипровідної лінії (рис. 6.2,а) напруга утворює прямокутний трикутник (рис. 6.2,б), катети якого $U_{AB} = U_{BC} = 360 V$, причому синусоїда лінійної напруги U_{AB} має початкову фазу на $\frac{\pi}{2}$ більшу ніж синусоїда напруги U_{BC} .

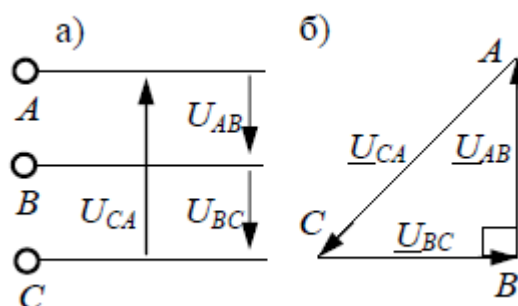


Рис. 6.2

Визначити симетричні складові несиметричної системи лінійних напруг. Знайти коефіцієнт несиметрії.

Розв'язання

Прийmemo $\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 360 \text{ В}$, тоді на підставі рис. 6.2,б

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB} e^{-j90^\circ} = 360 e^{-j90^\circ} \text{ В.}$$

Оскільки лінійні напруги утворюють замкнений контур, то

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

Звідки $\dot{U}_{CA} = -(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}) = -(360 + 360 e^{-j90^\circ}) = 360\sqrt{2} e^{j135^\circ} \text{ В.}$

Складова нульової послідовності в лінійних напругах відсутня, оскільки

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = \frac{360 + 360 e^{-j90^\circ} + 360\sqrt{2} e^{j135^\circ}}{3} = \frac{0}{3} = 0.$$

Складова прямої послідовності

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_{AB} + a\dot{U}_{BC} + a^2\dot{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{360 + 360 e^{-j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} + 360\sqrt{2} e^{j135^\circ} \cdot e^{-j120^\circ}}{3} = 402 e^{j15^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Складова зворотної послідовності

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{\dot{U}_{AB} + a^2\dot{U}_{BC} + a\dot{U}_{CA}}{3} = \\ &= \frac{360 + 360 e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 360\sqrt{2} e^{j135^\circ} \cdot e^{j120^\circ}}{3} = 108 e^{-j105^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Коефіцієнт несиметрії

$$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{108}{402} = 0.269 \quad \text{або} \quad k_U = 26,9\%$$

Відмітимо, що за Правилами технічної експлуатації установок споживачів (ПТЕ) величина несиметрії лінійних напруг (коефіцієнт несиметрії) не повинна перевищувати 4%.

ЗАДАЧА 6.3. До системи напруги задачі 6.2 увімкнений з'єднаний зіркою асинхронний трифазний двигун, кожна фаза якого має опори: при прямому

порядку чергування фаз $\underline{Z}_1 = 8 + j6 \text{ Ом}$, для зворотної послідовності – $\underline{Z}_2 = 4.5 + j1 \text{ Ом}$. Знайти струми у фазах двигуна.

Розв'язання

Уявимо, що двигун увімкнений до несиметричного генератора, а обмотки останнього з'єднані в зірку (рис. 6.3,а).

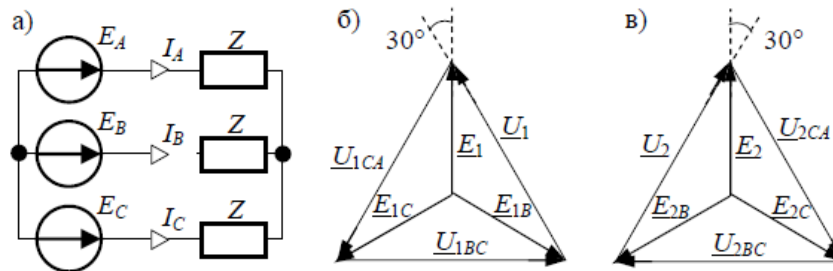


Рис. 6.3

Розрахуємо симетричні складові фазних ЕРС несиметричного генератора, використовуючи раніше знайдені симетричні скаладовві лінійної напруги \dot{U}_1 і \dot{U}_2 та їх співвідношення, представлені на векторних діаграмах рис. 6.3, б-в.

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j30^\circ} = \frac{402e^{j15^\circ}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j30^\circ} = 232e^{-j15^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{E}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} = \frac{108e^{-j105^\circ}}{\sqrt{3}} \cdot e^{j30^\circ} = 62.4e^{-j75^\circ} \text{ В}.$$

ЕРС несиметричного генератора виражаються через їх симетричні складові:

$$\dot{E}_A = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = 232e^{-j15^\circ} + 62.4e^{-j75^\circ} = 268.7e^{-j26.60^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{E}_B = a^2\dot{E}_1 + a\dot{E}_2 = 232e^{-j15^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 62.4e^{-j75^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 169.6e^{-j135^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = a\dot{E}_1 + a^2\dot{E}_2 = 232e^{-j15^\circ} \cdot e^{j120^\circ} + 62.4e^{-j75^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 268.7e^{j116.6^\circ} \text{ В}.$$

У результаті проведеного перетворення джерела ЕРС (послідовне з'єднання двох симетричних систем ЕРС – прямої та зворотної послідовностей) схема відносно симетричних складових симетрична і розраховується методом накладання.

Розрахунок струму прямої послідовності:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{232e^{-j15^\circ}}{8 + j6} = 23.2e^{-j51.87^\circ} \text{ A.}$$

Розрахунок струму зворотної послідовності:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{62.4e^{-j75^\circ}}{4.5 + j1} = 13.54e^{-j87.53^\circ} \text{ A.}$$

Струми у фазах двигуна розрахуємо з урахуванням того, що у трифазній трипровідній системі складові струмів нульової послідовності відсутні

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 23.2e^{-j51.87^\circ} + 13.54e^{-j87.53^\circ} = 35.10e^{-j64.86^\circ} \text{ A;}$$

$$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 = 23.2e^{-j51.87^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} + 13.54e^{-j87.53^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 12.22e^{j160.95^\circ} \text{ A;}$$

$$\dot{I}_C = a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 = 23.2e^{-j51.87^\circ} \cdot e^{j120^\circ} + 13.54e^{-j87.53^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 27.99e^{j96.90^\circ} \text{ A.}$$

ЗАДАЧА 6.4. Двигун задачі 6.3 був увімкнений до симетричного трифазного кола з лінійною напругою $U = 380 \text{ В}$. У колі стався обрив лінійного проводу C .

Виконати той же розрахунок, що і в задачі 6.3 для нових умов роботи двигуна.

Розв'язання

У симетричному трифазному колі сталося подовжнє порушення симетрії, що може трактуватися як послідовне увімкнення несиметричного приймача з доки невідомими напругами

$\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ та струмами $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$. Розрахункова схема нових умов роботи двигуна наведена на рис. 6.4.

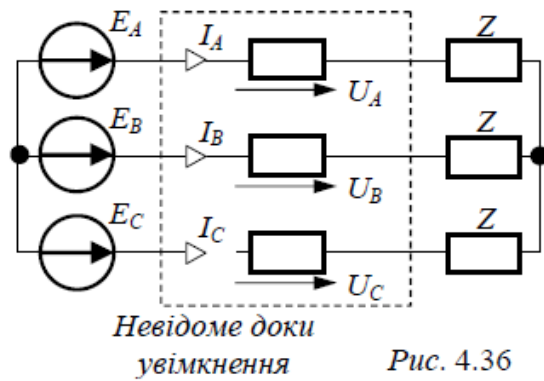


Рис. 6.4

Відзначимо, що у фазах невідомого доки підключення можуть міститися як пасивні, так і активні елементи кола.

Виконаємо формальне розкладання несиметричних систем напруг і струмів підключення на симетричні складові.

$$\begin{cases} \dot{i}_0 = \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3} \\ \dot{i}_1 = \frac{\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C}{3} \\ \dot{i}_2 = \frac{\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C}{3} \\ \dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C}{3} \\ \dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C}{3} \end{cases} \quad (6.1)$$

Визначимо симетричні складові заданої системи ЕРС генератора: за умовами задачі вона залишається симетричною, містить тільки складові прямої послідовності при порушенні симетричного стану кола. Симетрична система ЕРС не містить складових зворотної і нульової послідовності, тобто

для ЕРС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ отримуємо: $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$; $\dot{E}_1 = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$.

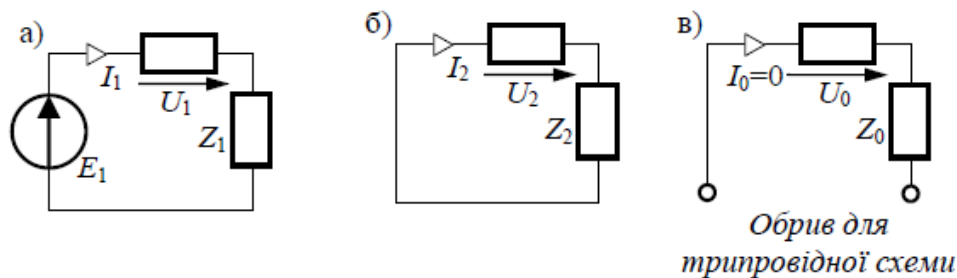


Рис. 6.5

Відносно симетричних складових вся схема стає симетричною і її розрахунок можна вести за схемами заміщення для однієї фази стосовно кожної системи.

Схема заміщення для струму прямої послідовності наведена на рис.6.5,а, для струму зворотної послідовності – на рис. 6.5,б, для струму нульової послідовності – на рис. 6.5,в.

Відповідно до законів Кірхгофа для схем заміщення отримуємо 3 рівняння для визначення шести невідомих симетричних складових напруг і струмів:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{U}_1 &= \dot{E}_1; \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{U}_2 &= 0; \\ \dot{I}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння, яких бракує, отримаємо, виходячи з характеристики несиметричної ділянки у відповідності до рис. 6.6 при обриванні лінійного проводу C:

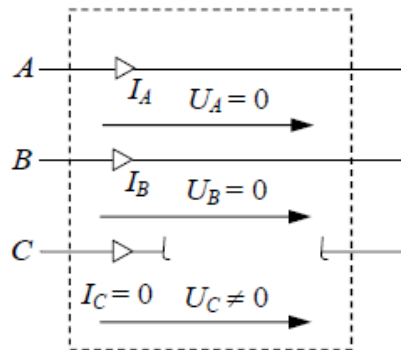


Рис. 6.6

$$\begin{aligned} \underline{\dot{U}}_A = 0; \quad \underline{\dot{U}}_B = 0; \quad \underline{\dot{U}}_C \neq 0; \\ \underline{\dot{I}}_A \neq 0; \quad \underline{\dot{I}}_B \neq 0; \quad \underline{\dot{I}}_C = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Три підкреслені рівняння визначені. Перепишемо їх, замінивши $\underline{\dot{U}}_A, \underline{\dot{U}}_B, \underline{\dot{I}}_C$ їх симетричними складовими (поки невідомими):

$$\begin{cases} \underline{\dot{U}}_A = \underline{\dot{U}}_0 + \underline{\dot{U}}_1 + \underline{\dot{U}}_2 = 0; \\ \underline{\dot{U}}_B = \underline{\dot{U}}_0 + a^2 \underline{\dot{U}}_1 + a \underline{\dot{U}}_2 = 0; \\ \underline{\dot{I}}_C = \underline{\dot{I}}_0 + a \underline{\dot{I}}_1 + a^2 \underline{\dot{I}}_2 = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

З системи (6.1) з урахуванням того, що $\dot{U}_A = 0$; $\dot{U}_B = 0$ отримуємо

$$\dot{U}_0 = \frac{\dot{U}_C}{3}; \quad \dot{U}_1 = \frac{a^2 \dot{U}_C}{3}; \quad \dot{U}_2 = \frac{a \dot{U}_C}{3}, \text{ звідси } \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = a. \quad (6.4)$$

Враховуємо, що $\dot{I}_0 = 0$ на підставі (6.3) отримуємо.

$$a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 = 0, \text{ звідси } \dot{I}_2 = -a^{-1} \dot{I}_1 \quad (6.5)$$

Рівняння (6.2), що залишились, представимо у вигляді

$$\dot{U}_1 = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \quad \dot{U}_2 = -\dot{I}_2 \underline{Z}_2, \text{ звідки з урахуванням (4.4) маємо}$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1}{-\dot{I}_2 \underline{Z}_2} = a, \text{ а з урахуванням (6.5)}$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1}{a^{-1} \dot{I}_1 \underline{Z}_2} = a \Rightarrow \frac{\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1}{\dot{I}_1 \underline{Z}_2} = a \cdot a^{-1} \Rightarrow \frac{\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1}{\dot{I}_1 \underline{Z}_2} = 1$$

Одержуємо $\dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_2$, звідси

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{220}{8 + j6 + 4.5 + j1} = 15.4 e^{-j29.25^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_2 = -a^{-1} \dot{I}_1 = -e^{-j120^\circ} \cdot 15.4 e^{-j29.25^\circ} = 15.4 e^{j30.75^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_0 = 0.$$

Струми у фазах двигуна:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 15.4 e^{-j29.25^\circ} + 15.4 e^{j30.75^\circ} = 26.6 e^{j0.75^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 15.4 e^{-j29.25^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 15.4 e^{j30.75^\circ} = 26.6 e^{-j179.25^\circ} \text{ A},$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 15.4 e^{-j29.25^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 15.4 e^{j30.75^\circ} = 0.$$

Практичне заняття 7.

Підготовка до модульної контрольної роботи 1.

Розрахунок трифазного кола синусоїдного струму

Практичне заняття 7 присвячене написання рубіжної модульної контрольної роботи. Для підготовки до МКР 1 рекомендовано виконати всі попередньо завдання практичних робіт з 1 по 7, винесені для самостійного опрацювання.

ЗАДАЧА 7.1. Трифазний приймач, фази якого з'єднані в зірку, увімкнений на напругу 380 В. Потужність і коефіцієнт потужності приймача

$$P_H = 11,9 \text{ кВт}, \cos\varphi = 0,72.$$

Виконати наступне:

- накреслити схему кола і визначити опір фази приймача Z_H ;
- накреслити схему кола при обриві В-фази, побудувати векторну діаграму і вказати, як зміниться потужність приймача порівняно з номінальною;
- накреслити схему кола при короткому замиканні В-фази, побудувати векторну діаграму і вказати, як зміниться потужність приймача порівняно з номінальною.

Відповіді: $Z_H = 6,3 + j6,1 \text{ Ом}$; зменшиться удвічі; зросте удвічі.

ЗАДАЧА 7.2. Трифазний приймач, фази якого з'єднані в трикутник, увімкнений на напругу 220 В. Потужність та коефіцієнт потужності приймача

$$P_H = 11,9 \text{ кВт}, \cos\varphi = 0,72.$$

Виконати наступне:

- накреслити схему кола і визначити опір фази приймача Z_H ;
- накреслити схему кола при обриві фази В, побудувати векторну діаграму і вказати, як зміниться потужність приймача порівняно з номінальною;
- накреслити схему кола при обриві лінійного проводу В, побудувати векторну діаграму і вказати, як зміниться потужність приймача порівняно з номінальною.

Відповіді: $Z_H = 6,3 + j6,1 \text{ Ом}$; зменшиться на одну третину; зменшиться удвічі.

Розділ 4

НЕСИНУСОЇДНІ ПЕРІОДИЧНІ СТРУМИ ТА ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ

Практичне заняття 8.

Розрахунок однофазного лінійного кола з несинусоїдною ЕРС

ЗАДАЧА 8.1. Виконати розрахунок струмів у гілках кола та показів приладів електромагнітної системи у колі (рис. 8.1), якщо

$$u_1 = 60 + 30\sin(\omega t + 60^\circ) + 30\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ В,}$$

$$E_2 = 30 \text{ В, } E_3 = 40 \text{ В,}$$

$$R_1 = 30 \text{ Ом, } \omega L_2 = 30 \text{ Ом, } \omega L_3 = 10 \text{ Ом, } 1/\omega C = 40 \text{ Ом.}$$

Розв'язання

Коло містить джерело несинусоїдної напруги u_1 , дію якого еквівалентно можна подати як дію трьох послідовно ввімкнених джерел:

- постійного $U_{1(0)} = 60 \text{ В}$;
- синусоїдного основної частоти $u_{1(1)} = 30\sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$;
- синусоїдного подвоєної частоти $u_{1(2)} = 30\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ В}$.

Оскільки коло розгалужене і кожна гілка має свій індекс, номер гармонік вказуємо у дужках.

Для аналізу кола застосуємо метод накладання дії джерел.

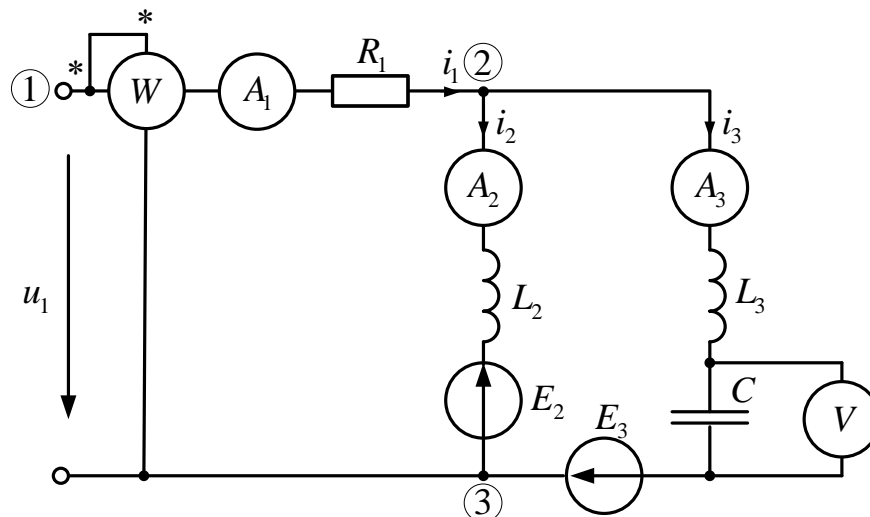


Рис. 8.1

Аналіз кола при дії нульової гармоніки.

Приводимо коло до вигляду кола постійного струму, де мають місце лише джерела постійної напруги та ЕРС, а опори реактивних елементів

$$x_{2(0)} = \omega L_{2(0)} = 0, \quad x_{3(0)} = \omega L_{3(0)} = 0, \quad x_{C(0)} = \left(\frac{1}{\omega C}\right)_{(0)} = \infty$$

Часткова схема набуває вигляду, показаного на рис. 8.2

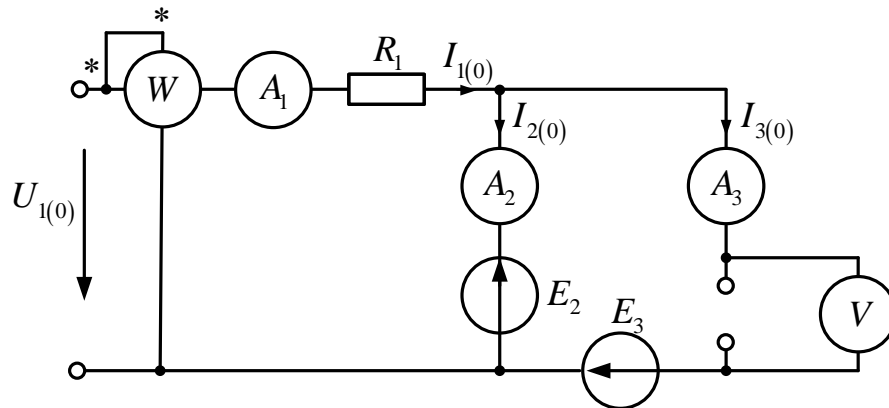


Рис. 8.2

Зі схеми видно, що $I_{3(0)} = 0$, тому

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = \frac{U_{1(0)} - E_2}{R_1} = 1 \text{ А},$$

$$U_{C(0)} = E_3 - E_2 = 10 \text{ В}.$$

Покази приладів при дії нульової гармоніки:

$$I_{A1(0)} = I_{A2(0)} = 1 \text{ А},$$

$$I_{A3(0)} = 0 \text{ А},$$

$$U_{V(0)} = 10 \text{ В},$$

$$P_{W(0)} = I_{A1(0)}^2 R_1 = 30 \text{ Вт}.$$

Аналіз кола при дії основної (першої) гармоніки.

Залишаємо у колі синусоїдну складову джерела $u_{1(1)} = 30 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В}$

і проводимо аналіз кола при дії першої гармонічної складової застосовуючи символічний метод.

Зписуємо комплекси амплітуди джерела $\dot{U}_{1m(1)} = 30e^{j60^\circ}$ В та опорів елементів основної частоти

$$\underline{Z}_{2(1)} = \omega L_2 = j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{L3(1)} = \omega L_3 = j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = -j40 \text{ Ом}.$$

Комплексні опори ділянок кола

$$\underline{Z}_{3(1)} = \underline{Z}_{L3(1)} + \underline{Z}_{C(1)} = j(10 - 40) = -j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{23(1)} = \frac{\underline{Z}_{2(1)} \cdot \underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = \frac{(j30)(-j30)}{j30 - j30} = \infty, \text{ що свідчить про резонанс струмів між}$$

вузлами 2-3.

Відповідно цьому явищу, еквівалентний опір кола $\underline{Z}_{екв(1)} = R_1 + \underline{Z}_{23(1)} = \infty$, а отже струм на вході кола

$$\dot{I}_{1m(1)} = \frac{\dot{U}_{1m(1)}}{\underline{Z}_{екв(1)}} = 0$$

$$\dot{U}_{12m(1)} = \dot{I}_{1m(1)} R_1 = 0$$

$$\dot{U}_{23m(1)} = \dot{U}_{1m(1)} - \dot{U}_{12m(1)} = 30e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Струм у паралельних гілках коливального контуру

$$\dot{I}_{2m(1)} = \frac{\dot{U}_{23m(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{30e^{j60^\circ}}{30e^{j90^\circ}} = 1e^{-j30^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{3m(1)} = -\dot{I}_{2m(1)} = 1e^{j150^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{Cm(1)} = \dot{I}_{3m(1)} \underline{Z}_{C(1)} = 1e^{j150^\circ} \cdot 40e^{-j90^\circ} = 40e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Переходимо від комплексів до миттєвих значень

$$i_{1(1)} = 0$$

$$i_{2(1)} = 1 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А},$$

$$i_{3(1)} = 1 \sin(\omega t + 150^\circ) \text{ A},$$

$$u_{C(1)} = 40 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ В.}$$

Покази приладів при дії першої гармоніки:

$$I_{A1(1)} = 0 \text{ A},$$

$$I_{A2(1)} = I_{A3(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ A},$$

$$U_{V(1)} = 40 \text{ В},$$

$$P_{W(1)} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{1(1)} \cdot I_{1(1)}^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{30}{\sqrt{2}} e^{j60^\circ} \cdot 0 \right\} = 0 \text{ Вт.}$$

Аналіз кола при дії другої гармоніки.

Залишаємо у колі синусоїдну складову джерела з подвоєною частотою $u_{1(2)} = 30 \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ В}$ і проводимо аналіз кола при дії другої гармонічної складової також застосовуючи символічний метод.

Зписуємо комплекси амплітуди джерела $\dot{U}_{1m(2)} = 30e^{-j20^\circ} \text{ В}$ та опорів елементів за умови подвоєної частоти

$$\underline{Z}_{2(2)} = 2\omega L_2 = j60 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{L3(2)} = 2\omega L_3 = j20 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = -j20 \text{ Ом.}$$

Комплексні опори ділянок кола

$\underline{Z}_{3(1)} = \underline{Z}_{L3(1)} + \underline{Z}_{C(1)} = j(20 - 20) = 0$, що свідчить про резонанс напруг у третій гілці.

Відповідно

$$\underline{Z}_{23(1)} = \frac{\underline{Z}_{2(1)} \cdot \underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = \frac{(j60)(0)}{j60 - 0} = 0 \text{ — друга гілка заморожена, а еквівалентний}$$

опір кола

$$\underline{Z}_{екв(1)} = R_1 + \underline{Z}_{23(1)} = R_1 = 30 \text{ Ом.}$$

Вхідний струм

$$\dot{i}_{1m(2)} = \frac{\dot{U}_{1m(2)}}{\underline{Z}_{екв(2)}} = \frac{30e^{-j20^\circ}}{30} = 1e^{-j20^\circ} \text{ А.}$$

Оскільки друга гілка заморочена, то $\dot{i}_{2m(2)} = 0$, а

$$\dot{i}_{3m(2)} = \dot{i}_{1m(2)} = 1e^{-j20^\circ} \text{ А.}$$

Напруга на конденсаторі

$$\dot{U}_{C(2)} = \dot{i}_{3m(2)} \underline{Z}_{C(2)} = 1e^{-j20^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ} = 20e^{-j110^\circ} \text{ В.}$$

Переходимо від комплексів до миттєвих значень

$$i_{1(2)} = 1 \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А,}$$

$$i_{2(2)} = 0$$

$$i_{3(2)} = 1 \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А,}$$

$$u_{C(2)} = 20 \sin(2\omega t - 110^\circ) \text{ В.}$$

Покази приладів при дії першої гармоніки:

$$I_{A1(2)} = I_{A3(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ А,}$$

$$I_{A2(2)} = 0 \text{ А,}$$

$$U_{V(2)} = 20 \text{ В,}$$

$$P_{W(2)} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{1(2)} \cdot \dot{I}_{1(2)}^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{30}{\sqrt{2}} e^{-j20^\circ} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j20^\circ} \right\} = 15 \text{ Вт.}$$

Вирази миттєвих значень струмів у гілках кола та напруги на конденсаторі при дії несинусоїдного джерела:

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(2)} = 1 + 1 \sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А,}$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(2)} = 1 + 1 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А,}$$

$$i_{3(2)} = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 1\sin(\omega t + 150^\circ) + 1\sin(2\omega t - 20^\circ) \text{ А},$$

$$u_C = U_{C(0)} + u_{C(1)} + u_{C(2)} = 10 + 40\sin(\omega t + 60^\circ) + 20\sin(2\omega t - 110^\circ) \text{ В}.$$

Покази приладів. Пам'ятаємо, що прилади електромагнітної системи реагують на діючі значення несинусоїдної величини, тому

$$I_{A1} = \sqrt{I_{A1(0)}^2 + I_{A1(1)}^2 + I_{A1(2)}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.23 \text{ А},$$

$$I_{A2} = \sqrt{I_{A2(0)}^2 + I_{A2(1)}^2 + I_{A2(2)}^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.23 \text{ А},$$

$$I_{A3} = \sqrt{I_{A3(0)}^2 + I_{A3(1)}^2 + I_{A3(2)}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \text{ А},$$

$$U_V = \sqrt{U_{V(0)}^2 + U_{V(1)}^2 + U_{V(2)}^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2} = 33 \text{ В},$$

$$P_W = P_{W(0)} + P_{W(1)} + P_{W(2)} = 30 + 15 = 45 \text{ Вт}.$$

ЗАДАЧА 8.2. Напругу $u = 50 + 200\sin(\omega t + 45^\circ) + 100\sin(3\omega t + 60^\circ)$ В подано на вхід кола рис. 8.3. Опори елементів кола струмам основної гармоніки становлять

$$R_1 = R_2 = R_3 = 8 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C_1} = 15 \text{ Ом}, \quad \omega L_2 = 3 \text{ Ом}, \quad \frac{1}{\omega C_3} = 15 \text{ Ом}.$$

Визначити миттєві і діючі значення всіх струмів, а також напруг u_{12} і u_{23} . Розрахувати коефіцієнт потужності кола і побудувати графік струму $i_1(t)$, якщо основна частота $f = 50$ Гц.

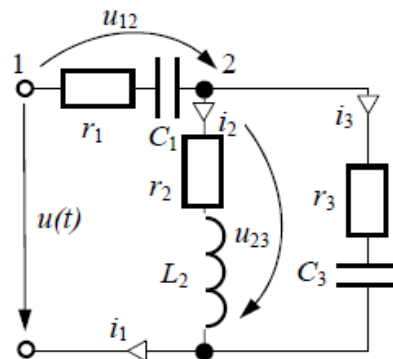


Рис. 8.3

Розв'язання

Розрахунок проведемо методом накладання по окремих гармоніках.

1. Розрахунок нульової гармоніки (постійної складової).

Оскільки для нульової гармоніки $\frac{1}{\omega C} = \infty$, то струми цієї гармоніки не можуть замикатися в колі, а вся напруга живлення буде прикладена до конденсатора C_1 :

$$I_{1(0)} = 0, I_{2(0)} = 0, I_{3(0)} = 0, U_{12(0)} = 50\text{В}, U_{23(0)} = 0.$$

2. Розрахунок першої (основної) гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{1(1)} = R_1 - j\left(\frac{1}{\omega C_1}\right) = 8 - j15 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2(1)} = R_2 + j\omega L_2 = 8 + j3 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3(1)} = R_3 - j\left(\frac{1}{\omega C_3}\right) = 8 - j15 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_{1(1)} + \frac{\underline{Z}_{2(1)} \cdot \underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = 15.24 - j15.57 = 21.79e^{-j45.6^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\dot{I}_{1m(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{200e^{j45^\circ}}{21.79e^{-j45.6^\circ}} = 9.18e^{j90.6^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{2m(1)} = \dot{I}_{1m(1)} \frac{\underline{Z}_{3(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = 7.8e^{j65.6^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{3m(1)} = \dot{I}_{1m(1)} \frac{\underline{Z}_{2(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} + \underline{Z}_{3(1)}} = 3.92e^{j148^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{12m(1)} = \dot{I}_{1m(1)} \underline{Z}_{1(1)} = 156.1e^{j28.7^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{23m(1)} = \dot{I}_{2m(1)} \underline{Z}_{2(1)} = 66.7e^{j86.1^\circ} \text{ В}.$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Визначаємо комплексні опори віток і вхідний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 - j\left(\frac{1}{3\omega C_1}\right) = 8 - j5 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega L_2 = 8 + j9 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = R_3 - j\left(\frac{1}{3\omega C_3}\right) = 8 - j5 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \frac{\underline{Z}_{2(3)} \cdot \underline{Z}_{3(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = 14.9 - j4.72 = 15.61e^{-j17.6^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів і напруг

$$\dot{I}_{1m(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{100e^{j60^\circ}}{15.61e^{-j17.6^\circ}} = 6.41e^{j77.6^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{2m(3)} = \dot{I}_{1m(3)} \frac{\underline{Z}_{3(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = 3.66e^{j31.6^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_{3m(3)} = \dot{I}_{1m(3)} \frac{\underline{Z}_{2(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} + \underline{Z}_{3(3)}} = 4.68e^{j111.9^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{12m(3)} = \dot{I}_{1m(3)} \underline{Z}_{1(3)} = 60.42e^{j45.6^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{23m(3)} = \dot{I}_{2m(3)} \underline{Z}_{2(3)} = 44.12e^{j79.9^\circ} \text{ В}.$$

4. Розраховуємо діючі значення струмів і напруг

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \left(\frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{1m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7.92 \text{ А},$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{2m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{2m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6.1 \text{ А},$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \left(\frac{I_{3m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{3m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4.32 \text{ А},$$

$$U_{12} = \sqrt{U_{12(0)}^2 + \left(\frac{U_{12m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{12m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 128.5 \text{ В},$$

$$U_{23} = \sqrt{U_{23(0)}^2 + \left(\frac{U_{23m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{23m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 56.5 \text{ В},$$

$$U = \sqrt{U_{(0)}^2 + \left(\frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 165.83 \text{ В}.$$

Миттєві значення струмів і напруг

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)} = 9.18 \sin(314t + 90.6^\circ) + 6.41 \sin(942t + 77.6^\circ) \text{ А},$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(3)} = 7.8 \sin(314t + 65.5^\circ) + 3.66 \sin(942t + 31.6^\circ) \text{ А},$$

$$i_3 = I_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(3)} = 3.92 \sin(314t + 148^\circ) + 4.68 \sin(942t + 111.9^\circ) \text{ А},$$

$$u_{12} = U_{12(0)} + u_{12(1)} + u_{12(3)} = 50 + 156.1 \sin(314t + 28.7^\circ) + 60.42 \sin(942t + 45.6^\circ) \text{ В},$$

$$u_{23} = U_{23(0)} + u_{23(1)} + u_{23(3)} = 66.7 \sin(314t + 86.1^\circ) + 44.12 \sin(942t + 79.9^\circ) \text{ В}.$$

5. Визначимо коефіцієнт потужності кола, для чого розрахуємо його активну і повну потужності:

$$P = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(3)} = U_{(0)} \cdot I_{1(0)} + \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{(1)} \cdot I_{1(1)}^* \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{(3)} \cdot I_{1(3)}^* \right\} =$$

$$= 0 + 642.1 + 305.3 = 947.4 \text{ Вт}$$

$$S = U \cdot I_1 = 1313 \text{ ВА},$$

$$\cos(\theta) = \frac{P}{S} = 0.722$$

6. Графік струму $i_1(t)$ побудований на рис. 8.4.

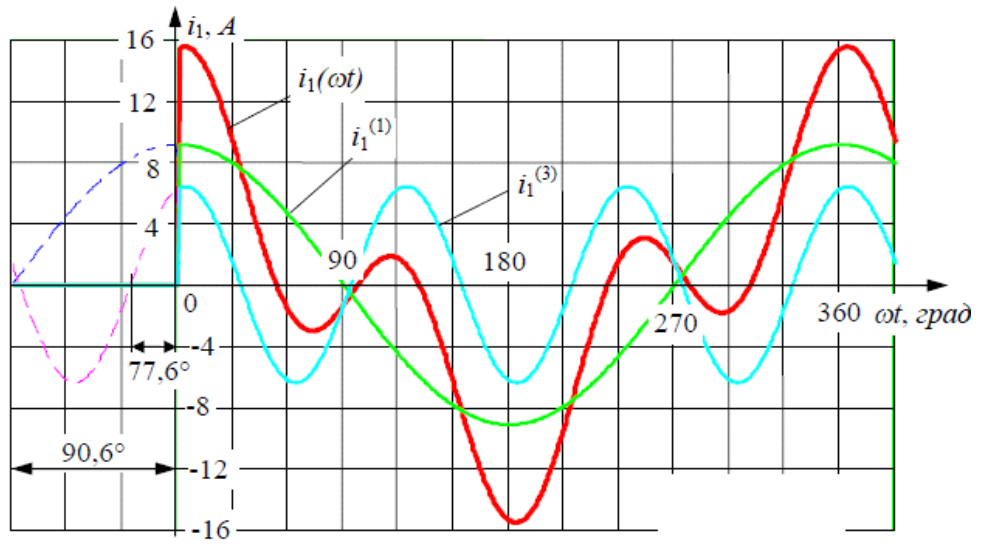


Рис. 8.4.

Практичне заняття 9.

Вищі гармоніки в трифазному колі

Фазні ЕРС та напруги у трифазних колах можуть містити різні гармоніки за виключенням постійної складової. Кут зсуву фаз між фазами А, В, С для k -ої гармоніки дорівнює $\varphi = 120^\circ k$. Тому усі гармоніки від $k=1$ до $k=\infty$ можна поділити на три характерні групи:

$$1, 4, 7 \dots (3N+1); \quad 2, 5, 8 \dots (3N+2); \quad 3, 6, 9 \dots (3N+3),$$

де N – натуральне число або 0. У трифазних колах вони формують системи прямої, зворотної та нульової послідовностей фаз.

Гармоніки прямої та зворотної послідовностей аналізуються у традиційний спосіб. Гармоніки нульової послідовності відсутні у лінійних напругах генератора. У зв'язку з цим при з'єднанні в зірку

$$U_{\text{Л}} = \sqrt{U_{\text{Л}(1)}^2 + U_{\text{Л}(2)}^2 + U_{\text{Л}(3)}^2 + U_{\text{Л}(4)}^2 \dots} < \sqrt{3}U_{\Phi},$$

$$\text{де } U_{\Phi} = \sqrt{U_{\Phi(1)}^2 + U_{\Phi(2)}^2 + U_{\Phi(3)}^2 + U_{\Phi(4)}^2 \dots}$$

За умови з'єднання приймачів зіркою навіть під час симетричного навантаження в нейтральному проводі протікає струм, причому він дорівнює потроєному струму нульової послідовності.

За умови з'єднання зіркою без нейтралі струми нульової послідовності не протікають, а напруга зміщення нейтралі під час симетричного навантаження:

$$u_{N'N} = U_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi_{(3)}) + U_{m(6)} \sin(6\omega t + \psi_{(6)})$$

$$\text{його діюче значення } U_{N'N} = \sqrt{\left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m(6)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dots}$$

ЗАДАЧА 9.1. Фазна напруга генератора, обмотки якого з'єднані зіркою, у режимі неробочого ходу містить першу $U_{(1)}$ і третю $U_{(3)}$ гармоніки.

1. Знайти діючі значення напруг цих гармонік за відомими показами вольтметрів фазної $U_{\phi} = 125 \text{ В}$ та лінійної напруг $U_{\text{Л}} = 210 \text{ В}$.
2. Яка похибка розрахунку, якщо у напрузі міститься ще й п'ята гармоніка, яка складає не більше 10% основної?

Розв'язання

1. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення двох гармонійних складових, визначаються рівняннями:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2}$$

$U_{\text{Л}} = \sqrt{3}U_{(1)}$ – лінійні напруги генератора не містять гармоніки кратні трьом;

розв'язавши систему з цих рівнянь, отримаємо

$$U_{(1)} = 121.2 \text{ В}, \quad U_{(3)} = 30.4 \text{ В}.$$

2. Покази вольтметрів, виражені через діючі значення трьох гармонійних складових:

$$U_{\phi} = \sqrt{U_{(1)}^2 + U_{(3)}^2 + 0.1^2 \cdot U_{(1)}^2}$$

$$U_{\text{Л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_{(1)}^2 + 0.1^2 \cdot U_{(1)}^2}$$

розв'язавши які, отримаємо

$$U_{(1)} = 120.6 \text{ В}, \quad U_{(3)} = 30.4 \text{ В}.$$

З порівняння цього результату з попереднім визначаємо, що похибка виміру першої гармоніки не перевищує 0,5 % (по третій гармоніці похибка виміру взагалі відсутня).

ЗАДАЧА 9.2. Симетричний генератор з фазною напругою

$$u_A(\omega t) = 310 \sin(\omega t - 30^\circ) + 93 \sin(3\omega t + 45^\circ) \text{ В}$$

живить з'єднане зіркою несиметричне навантаження (рис. 9.1) з опором фаз для струмів основної гармоніки

$$\underline{Z}_{A(1)} = 15 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{B(1)} = j15 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{C(1)} = -j15 \text{ Ом},$$

опір нейтралі $\underline{Z}_{N(1)} = 2 + j2 \text{ Ом}$.

Визначити покази приладів електромагнітної системи для випадків:

- а) рубильники S_1 і S_2 увімкнені;
- б) S_1 вимкнений, а S_2 увімкнений;
- в) обидва рубильники вимкнені.

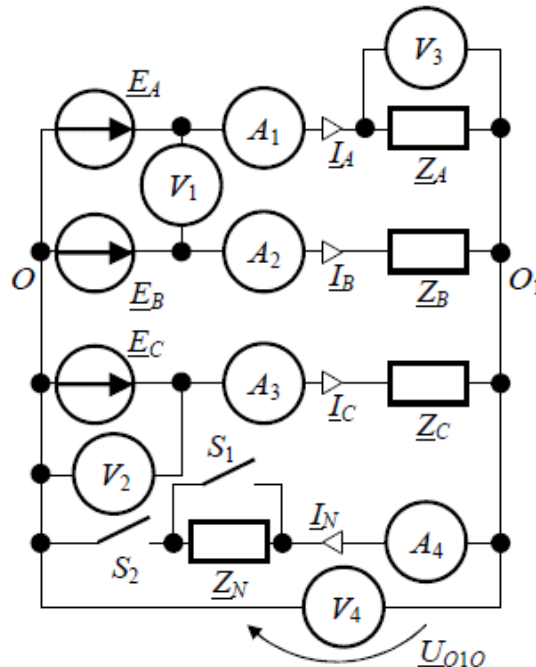


Рис. 9.1

Розв'язання

а) Рубильники увімкнені.

1. Виконаємо розрахунок струмів і напруг першої гармоніки.

Діючі значення комплексів фазних напруг генератора

$$\dot{U}_{A(1)} = \frac{U_{Am(1)} e^{j\psi(1)}}{\sqrt{2}} = 220 e^{-j30^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{B(1)} = 220 e^{-j150^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{C(1)} = 220 e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

При увімкненому нульовому проводі напруга зміщення нейтралі

$\dot{U}_{NN(1)}$ відсутня, тому фазні напруги споживача дорівнюють фазним напругам джерела живлення; струми у проводах лінії визначаємо згідно із законом Ома:

$$\dot{I}_{A(1)} = \frac{\dot{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = 14.67e^{-j30^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{B(1)} = \frac{\dot{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = 14.67e^{j120^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{C(1)} = \frac{\dot{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = -14.67 \text{ A}.$$

Струм основної гармоніки в нульовому проводі

$$\dot{I}_{N(1)} = \dot{I}_{A(1)} + \dot{I}_{B(1)} + \dot{I}_{C(1)} = 10.74e^{j150^\circ} \text{ A}.$$

2. Виконуємо розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки. Комплекси фазних напруг генератора з урахуванням того, що третя гармоніка утворює систему нульової послідовності

$$\dot{U}_{A(3)} = \dot{U}_{B(3)} = \dot{U}_{C(3)} = \frac{U_{Am(3)}e^{j\psi(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{93e^{j45^\circ}}{\sqrt{2}} = 65.76e^{j45^\circ} \text{ В}.$$

Напряга зміщення нейтралі відсутня. Струми визначаємо за законом

Ома:

$$\dot{I}_{A(3)} = \frac{\dot{U}_{A(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = \frac{65.76e^{j45^\circ}}{15} = 4.38e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{B(3)} = \frac{\dot{U}_{B(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} = \frac{65.76e^{j45^\circ}}{j3 \cdot 15} = 1.46e^{-j45^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{C(3)} = \frac{\dot{U}_{C(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}} = \frac{65.76e^{j45^\circ}}{-j3 \cdot 15} = 14.67e^{j135^\circ} \text{ A}.$$

Струм третьої гармоніки в нульовому проводі

$$\dot{I}_{N(3)} = \dot{I}_{A(3)} + \dot{I}_{B(3)} + \dot{I}_{C(3)} = 12.49e^{j114.4^\circ} \text{ A}.$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна напруга генератора (показ вольтметра V_1) дорівнює (у лінійній напрузі відсутні складові гармонік, кратних трьом):

$$U_{AB} = U_{AB(1)} = \sqrt{3}U_{A(1)} = \sqrt{3} \cdot 220 = 380 \text{ В}.$$

Фазна напруга U_C генератора (показ вольтметра V_2) містить всі наявні гармоніки

$$U_C = \sqrt{U_{C(1)}^2 + U_{C(3)}^2} = 229.6 \text{ В.}$$

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = \sqrt{(I_{A(1)}Z_{A(1)})^2 + (I_{A(3)}Z_{A(3)})^2} = 229.6 \text{ В.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4) $U_{N'N} = 0$.

Діючі значення струмів в проводах

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2} = 15.31 \text{ А (показ амперметра } A_1);$$

$$I_B = \sqrt{I_{B(1)}^2 + I_{B(3)}^2} = 14.74 \text{ А (показ амперметра } A_2);$$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(3)}^2} = 19.7 \text{ А (показ амперметра } A_3);$$

$$I_N = \sqrt{I_{N(1)}^2 + I_{N(3)}^2} = 16.47 \text{ А (показ амперметра } A_4).$$

б) У нульовому проводі знаходиться опір \underline{Z}_N .

1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\dot{U}_{N'N(1)} = \frac{\frac{\dot{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{\dot{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{\dot{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{N(1)}}} = 26.15e^{-j171.71^\circ} \text{ В.}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\dot{i}_{A(1)} = \frac{\dot{U}_{A(1)} - \dot{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = \frac{240.6e^{-j26.08^\circ}}{15} = 16.4e^{-j26.08^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{B(1)} = \frac{\dot{U}_{B(1)} - \dot{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = \frac{194.8e^{-j147.11^\circ}}{j15} = 12.99e^{-j237.11^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{C(1)} = \frac{\dot{U}_{C(1)} - \dot{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = \frac{224.6e^{j173.29^\circ}}{-j15} = 14.97e^{j173.29^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{N(1)} = \frac{\dot{U}_{N'N(1)}}{\underline{Z}_{N(1)}} = \frac{26.52e^{-j171.71^\circ}}{2.828e^{j45^\circ}} = 9.38e^{-j216.71^\circ} \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\dot{i}_{N(1)} = \dot{i}_{A(1)} + \dot{i}_{B(1)} + \dot{i}_{C(1)} = 9.38e^{-j216.71^\circ} \text{ A}.$$

2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\dot{U}_{N'N(3)} = \frac{\frac{\dot{U}_{A(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} + \frac{\dot{U}_{B(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} + \frac{\dot{U}_{C(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{N(3)}}} = 104.1e^{j101.05^\circ} \text{ В}.$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\dot{i}_{A(3)} = \frac{\dot{U}_{A(3)} - \dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = \frac{86.7e^{-j39.96^\circ}}{15} = 5.78e^{-j39.96^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{B(3)} = \frac{\dot{U}_{B(3)} - \dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} = \frac{86.7e^{-j39.96^\circ}}{j45} = 1.93e^{-j129.96^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{C(3)} = \frac{\dot{U}_{C(3)} - \dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{C(3)}} = \frac{86.7e^{-j39.96^\circ}}{-j5} = 17.34e^{j50.04^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{i}_{N(3)} = \frac{\dot{U}_{N'N(3)}}{\underline{Z}_{N(3)}} = \frac{104.1e^{j101.05^\circ}}{2 + j6} = 16.46e^{j29.49^\circ} \text{ A}.$$

Перевірка:

$$\dot{i}_{N(3)} = \dot{i}_{A(3)} + \dot{i}_{B(3)} + \dot{i}_{C(3)} = 16.46e^{j29.49^\circ} \text{ A}.$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів V_1 і V_2 , відповідно) залишаються такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = \sqrt{(\dot{U}_{A(1)} - \dot{U}_{NN(1)})^2 + (\dot{U}_{A(3)} - \dot{U}_{NN(3)})^2} = \sqrt{(240.6)^2 + (86.7)^2} = 255.7 \text{ В.}$$

Напруга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4)

$$\dot{U}_{NN} = \sqrt{(\dot{U}_{NN(1)})^2 + (\dot{U}_{NN(3)})^2} = \sqrt{(26.15)^2 + (104.1)^2} = 107.4 \text{ В.}$$

Діючі значення струмів в проводах

$$I_A = \sqrt{I_{A(1)}^2 + I_{A(3)}^2} = 17.05 \text{ А (показ амперметра } A_1);$$

$$I_B = \sqrt{I_{B(1)}^2 + I_{B(3)}^2} = 13.13 \text{ А (показ амперметра } A_2);$$

$$I_C = \sqrt{I_{C(1)}^2 + I_{C(3)}^2} = 22.91 \text{ А (показ амперметра } A_3);$$

$$I_N = \sqrt{I_{N(1)}^2 + I_{N(3)}^2} = 18.94 \text{ А (показ амперметра } A_4).$$

в) Нульовий провід вимкнений.

1. Розрахунок напруг і струмів першої гармоніки.

Визначаємо напругу зміщення нейтралі

$$\dot{U}_{NN(1)} = \frac{\frac{\dot{U}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{\dot{U}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{\dot{U}_{C(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}}}{\frac{1}{\underline{Z}_{A(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{B(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C(1)}}} = 161e^{j150^\circ} \text{ В}$$

Струми в проводах лінії розрахуємо за законом Ома

$$\dot{i}_{A(1)} = \frac{\dot{U}_{A(1)} - \dot{U}_{NN(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}} = 25.4e^{-j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{i}_{B(1)} = \frac{\dot{U}_{B(1)} - \dot{U}_{NN(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}} = 13.15e^{j165^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{i}_{C(1)} = \frac{\dot{U}_{C(1)} - \dot{U}_{NN(1)}}{\underline{Z}_{C(1)}} = 13.1e^{j135^\circ} \text{ А.}$$

Перевірка:

$$\dot{I}_{A(1)} + \dot{I}_{B(1)} + \dot{I}_{C(1)} = 0.$$

2. Розрахунок напруг і струмів третьої гармоніки.

Струми в лінійних проводах відсутні, оскільки для замикання струмів нульової послідовності (струмів гармонік, кратних трьом) необхідний нульовий провід: $\dot{I}_{A(3)} = \dot{I}_{B(3)} = \dot{I}_{C(3)} = 0$.

Напряга зміщення нейтралі дорівнює фазній напрузі генератора

$$\dot{U}_{N'N(3)} = \dot{U}_{A(3)} = 65.76e^{j45^\circ} \text{ В.}$$

3. Визначаємо покази приладів.

Лінійна і фазна напруга генератора (покази вольтметрів V_1 і V_2 , відповідно) залишаться такими ж, як і у попередньому випадку.

Фазна напруга U'_A приймача (показ вольтметра V_3)

$$U'_A = I_{A(1)} Z_{A(1)} = 380 \text{ В.}$$

Напряга зміщення нейтралі (показ вольтметра V_4)

$$\dot{U}_{N'N} = \sqrt{\left(\dot{U}_{N'N(1)}\right)^2 + \left(\dot{U}_{N'N(3)}\right)^2} = 174 \text{ В.}$$

Діючі значення струмів в проводах

$$I_A = I_{A(1)} = 25.4 \text{ А (показ амперметра } A_1);$$

$$I_B = I_{B(1)} = 13.15 \text{ А (показ амперметра } A_2);$$

$$I_C = I_{C(1)} = 13.1 \text{ А (показ амперметра } A_3).$$

Струм в нульовому провіді відсутній $I_N = 0$ (показ амперметра A_4).

Практичне заняття 10.

Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії постійних джерел енергії

ЗАДАЧА 10.1.

У колі рис. 10.1 розрахувати напругу на конденсаторі та струми перехідного процесу, якщо параметри кола

$$U=100 \text{ В}$$

$$R_1=60 \text{ Ом}$$

$$R_2=40 \text{ Ом}$$

$$C=10 \text{ мкФ}$$

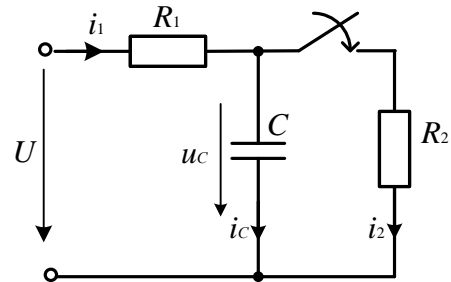


Рис. 10.1

Додаткове завдання: виконати розрахунок часу при якому напруга на конденсаторі буде становити 50% від усталеного значення.

Розв'язання

У післякомутаційному режимі коло описується наступною системою рівнянь за законами Кірхгофа відносно миттєвих значень струмів і напруги на конденсаторі:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_c(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) + u_c(t) = U \\ R_2 i_2(t) - u_c(t) = 0 \end{cases}$$

Додаткове рівняння – рівняння зв'язку між струмом та напругою конденсатора: $i_c = C \frac{du_c}{dt}$.

Систему рівнянь розв'язуємо способом підстановки – всі струми виражаємо через напругу на конденсаторі і підставляємо в перше рівняння системи. В результаті система рівнянь зводиться до одного лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. У даній задачі є лише один накопичувач – конденсатор, тому і рівняння виявилось першого порядку.

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_C(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) + u_C(t) = U \\ R_2 i_2(t) - u_C(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{U - u_C(t)}{R_1} - \frac{u_C(t)}{R_2} - C \frac{du_C}{dt} = 0 \\ i_1(t) = \frac{U - u_C(t)}{R_1} \\ i_2(t) = \frac{u_C(t)}{R_2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} u_C(t) = \frac{U}{CR_1}$$

Розв'язок рівняння згідно з класичним методом розрахунку перехідних процесів знаходиться у вигляді суми вимушеної (усталеної) і вільної складових: $u_C(t) = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{вл}}$.

Вимушена складова визначається видом правої частини рівняння, тобто характером джерела. У даному випадку, оскільки джерело постійне, усталена складова напруги на конденсаторі також буде постійною, а $\frac{du_{C\text{вим}}}{dt} = 0$:

$$\frac{du_{C\text{вим}}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} u_{C\text{вим}} = \frac{U}{CR_1} \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} u_{C\text{вим}} = \frac{U}{CR_1} \Rightarrow u_{C\text{вим}} = \frac{U}{CR_1} \cdot \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$u_{C\text{вим}} = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 100 \cdot \frac{40}{60 + 40} = 40 \text{ В.}$$

Вимушені складові струмів у колі можуть бути визначені шляхом аналізу кола після комутації в усталеному режимі:

$$i_{1\text{вим}} = \frac{U - u_{C\text{вим}}}{R_1} = \frac{100 - 40}{60} = 1 \text{ А;}$$

$$i_{2\text{вим}} = \frac{u_{C\text{вим}}}{R_2} = \frac{40}{40} = 1 \text{ А;}$$

$$i_{C\text{вим}} = 0.$$

Вигляд вільної складової залежить від числа та виду коренів характеристичного рівняння складеного для однорідного диференційного рівняння відносно напруги на конденсаторі. Тому складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння за наявним диференціальним рівнянням:

$$p + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = -\frac{60 + 40}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 40} = -4167 \text{ c}^{-1}$$

При одному корені характеристичного рівняння вільна складова напруги на конденсаторі має вигляд: $u_C(t) = Ae^{pt}$. Аналогічно знаходимо вигляд вільних складових струмів у колі:

$$i_1(t) = A_1e^{pt}; \quad i_2(t) = A_2e^{pt}; \quad i_C(t) = A_Ce^{pt}.$$

Постійні інтегрування знаходимо з використанням початкових умов. Напруга на конденсаторі до комутації:

$$u_C(0_-) = U = 100 \text{ В.}$$

Згідно з другим законом комутації, $u_C(0) = u_C(0_-) = U = 100 \text{ В.}$

Користуючись схемою заміщення для моменту комутації, знаходимо струми у колі:

$$i_1(0) = 0;$$

$$i_2(0) = -i_C(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{100}{40} = 2.5 \text{ А.}$$

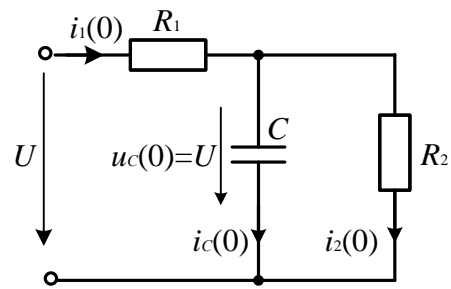


Рис. 10.2

Запишемо загальні вирази для перехідних величин та розрахуємо постійні інтегрування згідно початкових умов:

$$i_1(t) = i_{1\text{вим}} + i_{1\text{віль}} = 1 + A_1e^{pt}, \Rightarrow \Big|_{t=0} 0 = 1 + A_1 \Rightarrow A_1 = -1$$

$$i_2(t) = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{віль}} = 0.08 + A_2e^{pt}, \Rightarrow \Big|_{t=0} 2.5 = 1 + A_2 \Rightarrow A_2 = 1.5$$

$$i_C(t) = i_{C\text{вим}} + i_{C\text{віль}} = A_Ce^{pt}, \Rightarrow \Big|_{t=0} -2.5 = A_C \Rightarrow A_C = -2.5$$

$$U_C(t) = U_{C\text{вим}} + U_{C\text{віль}} = 40 + Ae^{pt}, \Rightarrow \Big|_{t=0} 100 = 40 + A \Rightarrow A = 60$$

Отже, кінцевими виразами перехідних функцій є:

$$i_1(t) = 1 - 1e^{-4167t},$$

$$i_2(t) = 1 + 1.5e^{-4167t},$$

$$i_C(t) = -2.5e^{-4167t},$$

$$u_C(t) = 40 + 60e^{-4167t}.$$

Перевірку правильності проведення розрахунків здійснюємо за законами Кірхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t), \Rightarrow 1 + 1.5e^{-4167t} + -2.5e^{-4167t} = 1 - 1e^{-4167t},$$

$$U = i_1(t)R_1 + u_C(t), \Rightarrow (1 - 1e^{-4167t}) \cdot 60 + 40 + 60e^{-4167t} = 100,$$

$$0 = i_2(t)R_2 - u_C(t), \Rightarrow (1 + 1.5e^{-4167t}) \cdot 40 - (40 + 60e^{-4167t}) = 0,$$

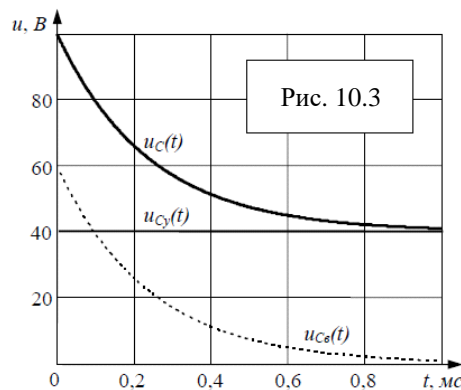
$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \Rightarrow 10 \cdot 10^{-6} \cdot 60e^{-4167t} \cdot (-4167) = -2.5e^{-4167t}.$$

Для побудови графіка $u_C(t)$ додатково обчислимо:

- стала часу кола $\tau = \left| \frac{1}{p} \right| = 0.24$ мс,

- практична тривалість переходного процесу $T_{III} = (3 \dots 5)\tau$. Візьмемо $T_{III} = 4\tau = 0.96$ мс.

Графік $u_C(t)$ будуюмо за складовими: окремо подаємо усталену та вільну складові, а потім їх графічно підсумовуємо. Графік поданий на рис. 10.3.



Додаткове завдання:

Для розрахунок часу при якому напруга на конденсаторі буде становити 50% від усталеного значення необхідно розв'язати рівняння

$$u_C(t_1) = 0.5u_{C\text{вим}} \Rightarrow 0.5 \cdot 40 = 0.5(40 + 60e^{-4167t_1})$$

з якого визначити час t_1 .

ЗАДАЧА 10.2.

Виконати розрахунок перехідних струму через котушку індуктивності при зміні положення ключа кожні 2 секунди: спершу ключ йде на розмикання, а потім на замикання.

Параметри кола

$$U=30 \text{ В}; t_1=2 \text{ с};$$

$$R= 1 \text{ Ом}; R_1=2 \text{ Ом}; L=2 \text{ Гн}.$$

Розв'язання

Для визначення закону зміни струму через індуктивність необхідно провести аналіз перехідного процесу в колі (рис. 10.4) для двох випадків:

- ключ розімкнений $0 \leq t \leq t_1$;
- ключ замкнений $t_1 \leq t \leq \infty$.

I. Ключ йде на розмикання.

Диференційне рівняння для даного електричного кола (після першої комутації) за II законом Кірхгофа має вигляд

$$U = i_L (R_1 + R) + L_1 \frac{di_L}{dt}$$

Розв'язок цього рівняння знаходимо у вигляді: $i_L(t) = i_{\text{ВВМ}} + i_{\text{ВВЛ}}$.

Для визначення вимушеної складової струму проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації ($t \rightarrow \infty$).

$$i_{\text{ВВМ}} = \frac{U}{R + R_1} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ А}$$

Визначимо вільну складову перехідної функції. Вільний процес являє собою умовний процес, який протікає при відсутності джерел енергії за рахунок накопиченої до комутації енергії на реактивних елементах. Рівняння енергетичного балансу в колі, яке описує вільний процес (рис. 10.5, а), являє собою однорідне диференційне рівняння:

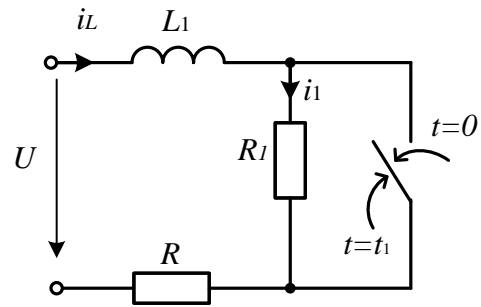


Рис. 10.4

$$0 = i_{\text{ввл}} (R_1 + R) + L_1 \frac{di_{\text{ввл}}}{dt}.$$

Існують два способи визначення коренів характеристичного рівняння.

Перший спосіб полягає у виконання заміни $\frac{d}{dt}$ на p у однорідному диференційному рівнянні.

$$L_1 \frac{di_{\text{ввл}}}{dt} + i_{\text{ввл}} (R_1 + R) = 0$$

$$L_1 p + (R_1 + R) = 0$$

Отже, корені будемо шукати як

$$L_1 p + (R_1 + R) = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 + R}{L_1}.$$

Другий спосіб називається методом “вхідного опору”. Для цього в після комутаційній схемі вилучаємо всі джерела енергії (вільний режим) та заміняємо $j\omega$ на p (отримали операторну схему заміщення). Розриваємо коло у точках а-б (рис. 10,5, б) та записуємо вираз для вхідного опору відносно точок розриву.

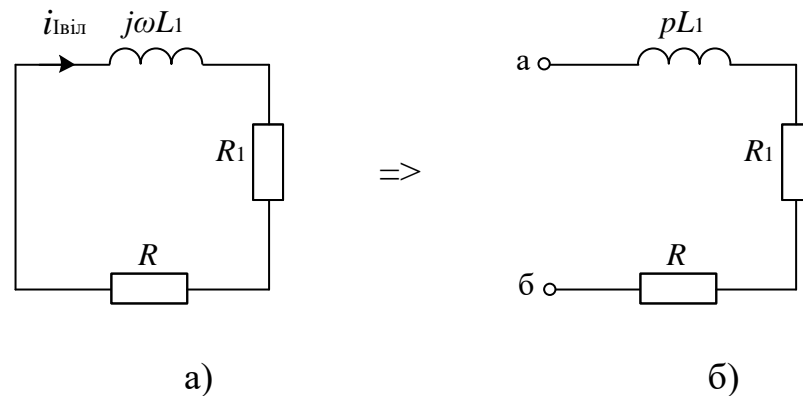


Рис. 10.5

$$Z_{\text{вх}}(p_l) = p_l L_1 + R_1 + R \Rightarrow p_l L_1 + R_1 + R = 0$$

$$p_l = -\frac{R_1 + R}{L_1}$$

$$p_l = -1.5 \text{ c}^{-1} \Rightarrow \tau_l = \frac{1}{|p_l|} = 0.667 \text{ c}$$

Порівнюючи вирази характеристичного рівняння та його корені, отримані двома способами, приходимо до висновку, що вони ідентичні.

Отже, вільна складова струму записуємо у вигляді

$$i_{\text{Віл}} = Ae^{p_1 t}.$$

Для розрахунку сталої інтегрування визначимо початкові умови. Струм через котушку до комутації:

$$i_I(0_-) = \frac{U}{R} = \frac{30}{1} = 30 \text{ А}$$

Згідно першого закону комутації: $i_I(0_-) = i_I(0) = 30 \text{ А}$.

Визначимо постійну інтегрування A , для цього запишемо вираз перехідного струму для першого випадку у загальній формі:

$$i_I(t) = i_{\text{Вим}} + i_{\text{Віл}} = 10 + Ae^{p_1 t}.$$

Для момент комутації ($t=0$):

$$i_I(0) = i_{\text{уст}}(0) + i_{\text{Віл}}(0) \Rightarrow 30 = 10 + A \Rightarrow A = 30 - 10 = 20$$

Перехідний струм через індуктивність для випадку розмикання ключа:

$$i_I(t) = 10 + 20e^{-1.5t} = 10(1 + 2e^{-1.5t}) \text{ А}.$$

I. Ключ йде замикання.

Згідно умови, через 2 с після розмикання, ключ іде на замикання. Після замикання ключа змінюється опір схеми. Диференціальне рівняння для новоутвореного електричного кола (після другої комутації) за II законом Кірхгофа має вигляд

$$u = i_{II} R + L_1 \frac{di_{II}}{dt}.$$

Розв'язок диференціального рівняння знаходимо у вигляді:

$$i_{II}(t) = i_{\text{Вим}} + i_{\text{Віл}}.$$

Вимушену складову знаходимо з розрахунку усталеного режиму після комутації.

$$i_{\text{Вим}} = \frac{U}{R} = \frac{30}{1} = 30 \text{ А}$$

Однорідне диференційне рівняння, для визначення вільної складової струму, має вигляд:

$$0 = i_{\text{віль}} R + L_1 \frac{di_{\text{віль}}}{dt}.$$

Електричне коло, якому відповідає дане рівняння зображене на рис. 10.6, а.

На рис. 5, б зображена операторна схема заміщення для одержання характеристичного рівняння та визначення його коренів p .

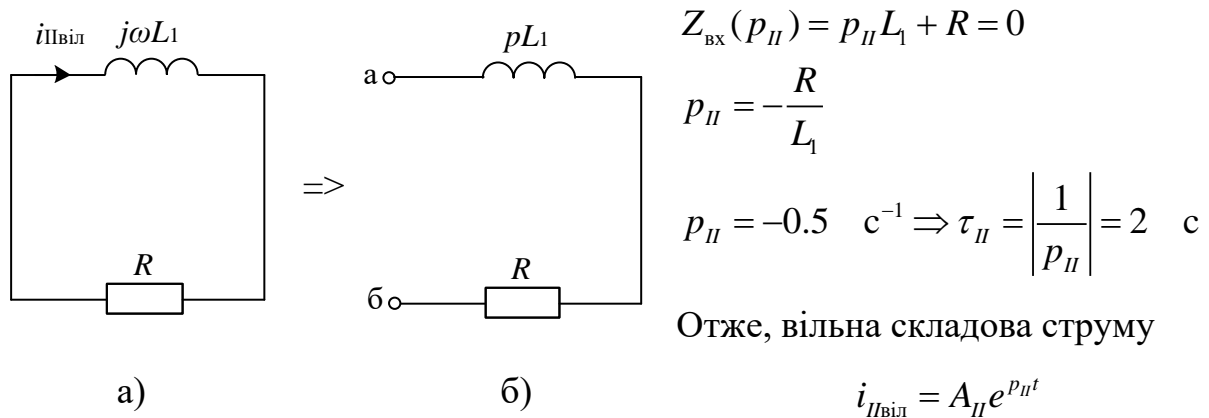


Рис. 10.6

Знаходимо усталену складову перехідного струму до комутації для розрахунку сталої інтегрування:

$$i_{\text{II}}(t \leq t_1) = i_t = 10(1 + 2e^{-1.5t}) \text{ А.}$$

В момент другої комутації ($t=t_1$) через індуктивність протікає струм

$$i_{\text{II}}(t=t_1) = 10(1 + 2e^{-1.5 \cdot 2}) = 11 \text{ А.}$$

Перехідний струм після другої комутації:

$$i_{\text{II}}(t) = i_{\text{ввим}} + i_{\text{віль}} = 30 + A_{\text{II}} e^{p_{\text{II}}(t-t_1)}.$$

Визначимо постійну інтегрування A для моменту комутації ($t=0$):

$$i_{\text{II}}(0) = i_{\text{ввим}}(0) + i_{\text{віль}}(0) \Rightarrow 11 = 30 + A_{\text{II}} \Rightarrow A_{\text{II}} = 11 - 30 = -19$$

Перехідний струм через індуктивність у випадку замикання ключа:

$$i_{\text{II}}(t) = 30 - 19e^{-0.5(t-2)} \text{ А.}$$

Графік зміни струму через індуктивність з урахуванням одного циклу перемикачів показано на рис. 10.7.

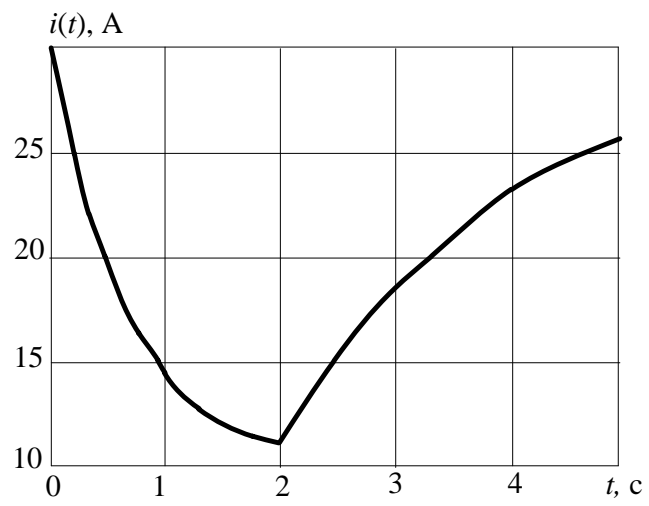


Рис. 10.7

Практичне заняття 11.

Розрахунок перехідного процесу у колі з одним накопичувачем енергії при дії джерела синусоїдної напруги

ЗАДАЧА 11.1.

На вхід кола (рис. 11.1) з параметрами $x_1 = x_2 = 20$ Ом; $R_1 = 11.5$ Ом; $R_2 = 58$ Ом подається синусоїдна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, амплітудне значення якої – $U_m = 170$ В, а частота – $f = 400$ Гц. В момент комутації величина вхідної напруги дорівнює діючому значенню: $u(0) = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = U$.

Визначити струми через індуктивності.

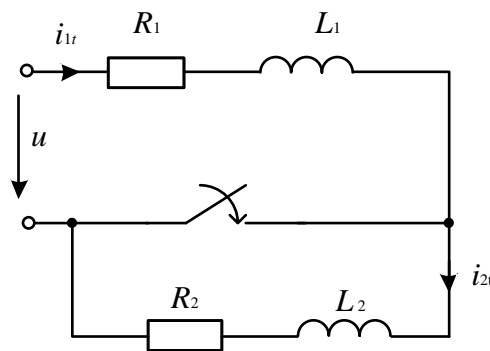


Рис. 11.1

Розв'язання

Визначимо початкову фазу вхідної напруги ψ_u та величини індуктивностей L .

Оскільки, $u(0) = U_m \sin \psi_u = U$, то

$$\psi_u = \arcsin\left(\frac{u(0)}{U_m}\right) = \arcsin\left(\frac{U}{U_m}\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Отже, $\psi_u' = 45^\circ$, $\psi_u'' = 135^\circ$.

Таким чином, у колі (рис. 11.1) діє вхідна напруга:

$$u(t) = 170 \sin(2510t + 45^\circ) \text{ В.}$$

Величину індуктивності визначимо, як:

$$L = \frac{x}{\omega} = \frac{20}{2\pi \cdot 400} = 0.0796 \text{ Гн} = 7.96 \text{ мГн}$$

Задаємо довільні додатні напрями струмів та записуємо систему рівнянь за II законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} &= u \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Перехідні функції струмів шукаємо як суми відповідних вимушених та вільних складових:

$$i_1(t) = i_{1\text{вим}} + i_{1\text{віль}}; \quad i_2(t) = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{віль}}$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації та визначимо вимушені складові перехідних струмів. Оскільки після замикання ключа вітка R_2-L_2 закорочується, вимушені струми визначаються незалежно один від одного.

$$\dot{I}_{m1\text{вим}} = \frac{\dot{U}_m}{(R_1 + jx)} = \frac{170e^{j45}}{(11.5 + j20)} = 7.37e^{-15.1j} \text{ А}$$

$$i_{1\text{вим}} = 7.37 \sin(2510t - 15.1^\circ) \text{ А}$$

$$i_{2\text{вим}} = 0$$

Визначимо вільні складові перехідного струму. Для цього в після комутаційній схемі вилучаємо всі джерела енергії, замінивши їх внутрішніми опорами, утворивши коло для розрахунку вільного процесу. В ньому (рис. 11.2) є два незалежні контури в кожному з яких циркулює струм. Отже, характеристичне рівняння складаємо для кожного з контурів і визначаємо сталу часу.

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{7.96 \cdot 10^{-3}}{11.5} = 0.692 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{7.96 \cdot 10^{-3}}{58} = 0.1372 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

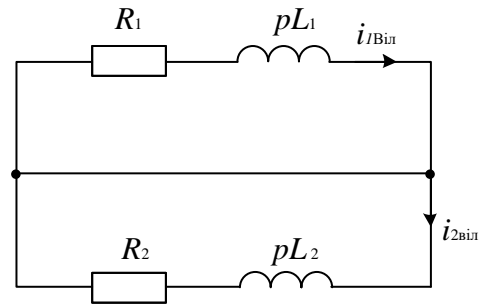


Рис. 11.2

Запишемо загальні вирази для шуканих струмів відповідно до виду коренів характеристичного рівняння:

$$i_1(t) = i_{1\text{ввм}} + i_{1\text{вiл}} = 7.37 \sin(\omega t - 15.1^\circ) + A_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}},$$

$$i_2(t) = i_{2\text{ввм}} + i_{2\text{вiл}} = A_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}.$$

Для розрахунку сталих інтегрування проведемо розрахунок початкових умов з усталеного режиму до комутації:

$$\dot{I}_{1m(0-)} = \dot{I}_{2m(0-)} = \frac{\dot{U}_m}{(R_1 + R_2 + 2jx)} = \frac{170e^{45j}}{(11.5 + 58 + 2j20)} = 2.12e^{15.08j} \text{ А}$$

$$i_{1(0-)} = i_{2(0-)} = 2.12 \sin(2510t + 15.08^\circ) \text{ А}$$

Отже, згідно з першим законом комутації, незалежними початковими умовами є:

$$i_1(0) = i_2(0) = i_1(0_-) = 2.12 \sin(15.08^\circ) = 0.552 \text{ А}$$

Знайдемо сталі інтегрування. Для цього запишемо загальні вирази для шуканих перехідних струмів $i_1(t)$ та $i_2(t)$ в момент $t=0$:

$$i_1(0) = 7.37 \sin(-15.1^\circ) + A_1 = 0.552 \Rightarrow A_1 = 2.47$$

$$i_2(0) = A_2 = 0.552 \Rightarrow A_2 = 0.552$$

Запишемо кінцеві вирази законів змінення струмів в колі:

$$i_1(t) = 7.37 \sin(\omega t - 15.1^\circ) + 2.47 e^{-1445t} \text{ А}$$

$$i_2(t) = 0.552 e^{-7290t} \text{ А}$$

Визначимо момент, при якому перехідний процес відсутній.

Оскільки характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання кола, необхідно визначити початкову фазу вхідної напруги:

$$A_1 = I_{1m(-0)} \sin(\psi_u - \varphi) - I_{1m\text{ввм}(-0)} \sin(\psi_u - \varphi_1) = 0$$

$$I_{1m(-0)} \sin(\psi_u - \varphi) = I_{1m\text{ввм}(-0)} \sin(\psi_u - \varphi_1)$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(\frac{x}{R_1}\right) = \arctg\left(\frac{20}{11.5}\right) = 60.1^\circ$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{x}{R_2}\right) = \arctg\left(\frac{20}{58}\right) = 19.03^\circ$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2x}{R_1 + R_2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot 20}{11.5 + 58}\right) = 29.9^\circ$$

$$2.12 \sin(\psi_u - 29.9^\circ) = 7.37 \sin(\psi_u - 60.1^\circ)$$

$$5.33 \cos \psi_u = 1.836 \sin \psi_u$$

$$\psi_u = \arctg\left(\frac{5.33}{1.836}\right) \approx 71^\circ$$

ЗАДАЧА 11.2

В колі (рис. 11.3) з параметрами $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $C = 125$ мкФ, протікав струм $i(t) = 5 \sin \omega t$ А з кутовою частотою $\omega = 1000^{-1}$ с. В перший момент після комутації струм через R_1 не протікає $i_1(0) = 0$.

Виконати розрахунок перехідного струму $i_2(t)$ та напруги на конденсаторі $u_C(t)$.

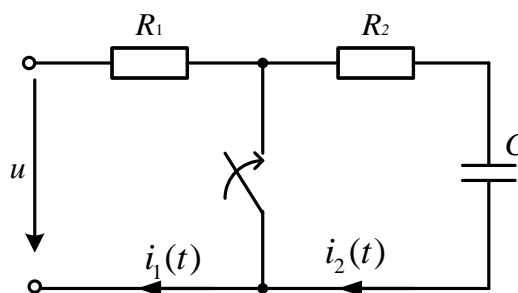


Рис. 11.3

Розв'язання

Визначимо комплекс амплітуди вхідної напругу

$$U_m = I_m(0_-) \left(R_1 + R_2 - \frac{j1}{\omega C} \right) = 5 \left(2 + 4 - \frac{j1}{10^3 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} \right) = 50e^{-53.1j} \text{ В}$$

та її миттєве значення

$$u = 50 \sin(1000t - 53.1^\circ) \text{ В}$$

Задаємо довільні додатні напрями струмів та записуємо систему рівнянь за II законом Кірхгофа

$$i_1 R_1 = u$$

$$i_2 R_2 + u_C \frac{di_2}{dt} = 0$$

$$i_2 = C \frac{du_C}{dt}$$

Перехідні функції струмів шукаємо як суми відповідних вимушених та вільних складових:

$$i_1(t) = i_{1\text{вим}} + i_{1\text{віль}}; \quad i_2(t) = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{віль}}; \quad u_C(t) = u_{C\text{вим}} + u_{C\text{віль}}.$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації та визначимо вимушені складові перехідних величин:

$$i_1(t) = i_{1\text{вим}} = \frac{u}{R_1} = \frac{50}{2} \sin(1000t - 53.1^\circ) = 25 \sin(10^3 t - 53.1^\circ) \text{ А};$$

$$i_{2\text{вим}} = 0; \quad u_{C\text{вим}} = 0.$$

Вільному режиму відповідає схема, зображена на рис. 11.4. Диференційне рівняння кола:

$$i_{2\text{віль}} R_2 + \frac{1}{C} \int i_{2\text{віль}} dt = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{di_{2\text{віль}}}{dt} R + \frac{1}{C} i_{2\text{віль}} = 0$$

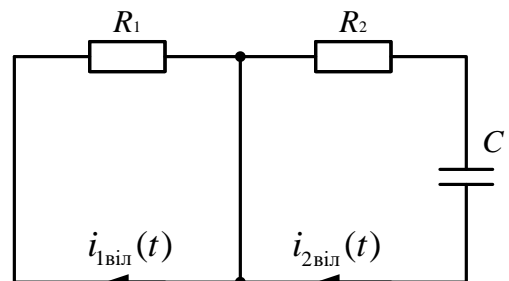


Рис. 11.4

Розв'язавши дане рівняння отримаємо сталу інтегрування:

$$\tau_2 = R_2 C = 4 \cdot 125 \cdot 10^{-6} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 0.5 \text{ мс}.$$

Вираз перехідного струму у загальному вигляді має вигляд:

$$i_2(t) = i_{2\text{вим}} + i_{2\text{ввл}} = A_2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau_2}}.$$

Проведемо розрахунок усталеного режиму до комутації та визначимо незалежні початкові умови.

$$U_{mC}(0_-) = I_m(0_-) \left(\frac{-1 \cdot j}{\omega C} \right) = 5 \left(\frac{-1 \cdot j}{10^3 \cdot 125 \cdot 10^{-6}} \right) = -40j \text{ В}$$

$$\text{звідки } u_C(0_-) = 40 \sin(1000t - 90^\circ) \text{ В.}$$

Отже, напруга на конденсаторі, згідно другого закону комутації, та струм, як залежна початкова умова, в момент комутації дорівнюють

$$u_C(0) = 40 \sin(-90^\circ) = -40 \text{ В,}$$

$$i_2(0) = \frac{-u_C(0)}{R_2} = -\frac{40}{4} = -10 \text{ А.}$$

Знак “-” показує, що струм протікає у зворотному напрямку, отже конденсатор розряджається на резистор.

Враховуючи початкові умови, розрахуємо сталу інтегрування:

$$i_2(0) = i_{2\text{вим}}(0) + i_{2\text{ввл}}(0) \Rightarrow A_2 = 10.$$

Перехідний струм та напруга на конденсаторі:

$$i_2(t) = 10e^{\frac{-t}{0.510^{-3}}} = 10e^{-2000t} \text{ А;}$$

$$u_C(t) = -40e^{-2000t} \text{ В.}$$

Практичне заняття 12.

Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії постійних джерел енергії

ЗАДАЧА 12.1

Виконати розрахунок початкових умов у колі другого порядку за відомих параметрів кола:

$$E_1 = 200 \text{ В}$$

$$e_2 = 100\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \text{ В}$$

$$C = 100 \text{ мкФ}$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 120 \text{ Ом}$$

$$L_3 = 0.1 \text{ Гн}$$

$$L_4 = 0.2 \text{ Гн}$$

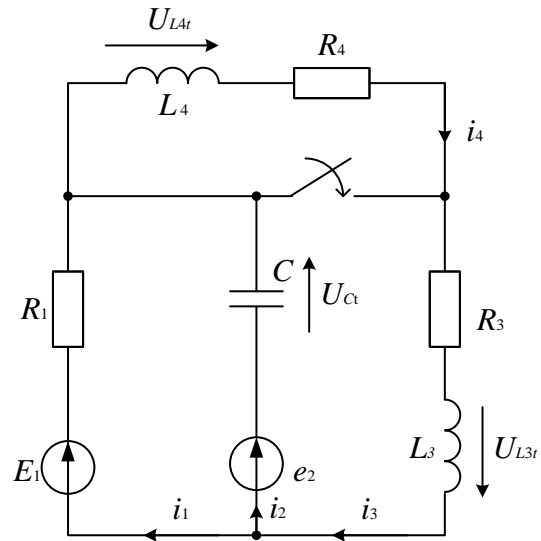


Рис. 12.1

Розв'язання:

У даній задачі невідомими величинами є значення струмів у всіх гілках та пруги на реактивних елементах в момент комутації:

$$i_1(0), i_2(0), i_3(0), i_4(0), u_C(0), u_{L_3}(0), u_{L_4}(0).$$

Оскільки у колі одночасно діють джерела постійної та синусоїдної напруг, для виконання поставленої задачі скористаємось методом накладання.

1. Проведемо розрахунок усталеного режиму до комутації ($t < 0$):

$$1.a. E_1 \neq 0; e_2 = 0$$

Отже, у колі діє лише джерело постійної напруги (див. рис. 17).

$$\begin{aligned} i_{1a}(0_-) = i_{3a}(0_-) = i_{4a}(0_-) = \\ = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{200}{200 + 30 + 120} = 0.8 \text{ A} \end{aligned}$$

$$u_{Ca}(0_-) = i_{3a}(0_-)(R_3 + R_4) = 0.8(30 + 120) = 12$$

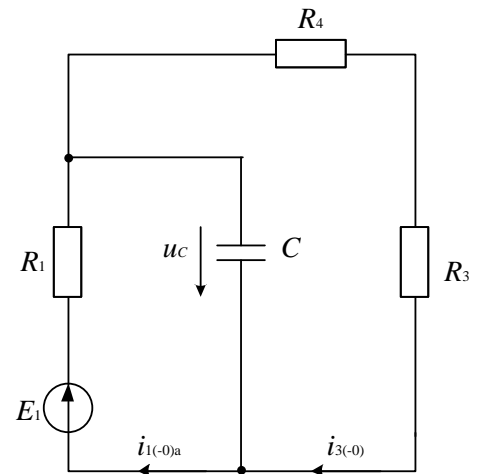


Рис. 12.2

$$1.b. E_1 = 0; e_2 \neq 0$$

Отже, у колі діє лише джерело змінної напруги. Проведемо розрахунки у комплексному вигляді.

$$\dot{E}_2 = 100e^{-30j} \text{ В}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_6(0_-) &= -j \frac{1}{\omega C} + \frac{R_1(R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4)}{R_1 + R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4} = \\ &= -j \frac{10^4}{314} + \frac{100(30 + j314 \cdot 0.1 + 120 + j314 \cdot 0.2)}{100 + 30 + j314 \cdot 0.1 + 120 + j314 \cdot 0.2} = 67.6e^{-16.02j} = 65 - j18.65 \text{ Ом} \end{aligned}$$

$$\dot{i}_{26}(0_-) = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_{(-0)6}} = \frac{100e^{-30j}}{67.6e^{-16.02j}} = 1.479e^{-13.98j} = 1.435 - j0.357 \text{ A}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{36}(0_-) &= \dot{i}_{16}(0_-) \frac{R_1}{R_1 + R_3 + j\omega L_3 + R_4 + j\omega L_4} = \\ &= \frac{1.479e^{-13.98j} \cdot 100}{100 + 30 + j314 \cdot 0.1 + 120 + j314 \cdot 0.2} = 0.554e^{-34.6j} \text{ A} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{C6}(0_-) = \dot{i}_{26}(0_-) \left(\frac{j1}{\omega C} \right) = 1.479e^{-13.98j} \frac{-j10^4}{314} = 47.1e^{-104j} \text{ В}$$

Таким чином, миттєві значення для струму та напруги на конденсаторі матимуть вигляд:

$$i_{36}(0_-) = i_{46}(0_-) = 0.554\sqrt{2} \sin(314t - 36.4^\circ) \text{ A}$$

$$u_{C6}(0_-) = 47.1\sqrt{2} \sin(314t - 104^\circ) \text{ В}$$

$$1.c. \quad E_1 \neq 0; \quad e_2 \neq 0$$

У колі діють джерела постійної та змінної напруг.

$$i_3(0_-) = i_4(0_-) = i_{3a}(0_-) + i_{3b}(0_-) = 0.8 + 0.554\sqrt{2} \sin(314t - 34.6^\circ) \quad \text{А}$$

$$u_C(0_-) = u_{Ca}(0_-) + u_{Cb}(0_-) = -120 + 47.1\sqrt{2} \sin(314t - 104^\circ) \quad \text{В}$$

2. Проведемо розрахунок в момент комутації та визначимо залежні початкові умови.

Згідно до першого та другого законів комутації, струм у вітці з індуктивністю та напруга на конденсаторі не можуть змінитися стрибком.

$$i_3(0) = i_4(0) = 0.8 + 0.554\sqrt{2} \sin(-34.6^\circ) = 0.355 \quad \text{А};$$

$$u_C(0) = -120 + 47.1\sqrt{2} \sin(-104^\circ) = -184.6 \quad \text{В}.$$

У момент $t=0$ значення змінної ЕРС набуває вигляду:

$$e_2(0) = E_2 \sqrt{2} \sin \psi = 100 \cdot \sqrt{2} \sin(-30^\circ) = -70.7 \quad \text{В}$$

Складемо за законами Кірхгофа систему рівнянь для післякомутаційної схеми з урахуванням незалежних початкових умов (згідно законів комутації);

$$\begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0)R_1 - u_C(0) = E_1 - e_2(0) \\ u_C(0) - i_3(0)R_3 + u_{L3}(0) = e_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - 0.355 = 0 \\ 100i_1(0) + 184.6 = 200 + 70.7 \\ -184.6 + 0.355 \cdot 30 + u_{L3}(0) = -70.7 \end{cases}$$

Розв'язавши систему будь-яким методом, отримаємо:

$$i_1(0) = 0.861 \quad \text{А}$$

$$i_2(0) = -0.506 \quad \text{А}$$

$$i_3(0) = i_4(0) = 0.355 \quad \text{А}$$

$$u_C(0) = -184.6 \quad \text{В}$$

$$u_{L3}(0) = 103.3 \quad \text{В}$$

$$u_{L4}(0) = -42.6 \quad \text{В}$$

ЗАДАЧА 12.2

Виконати розрахунок перехідних струмів та напруг на реактивних елементах за заданих параметрів кола:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 200 \text{ В} \\
 E_2 &= 100 \text{ В} \\
 R_1 &= 100 \text{ Ом} \\
 R_3 &= 30 \text{ Ом} \\
 R_4 &= 20 \text{ Ом} \\
 L_3 &= 0.1 \text{ Гн} \\
 L_4 &= 0.2 \text{ Гн} \\
 C &= 100 \text{ мкФ}
 \end{aligned}$$

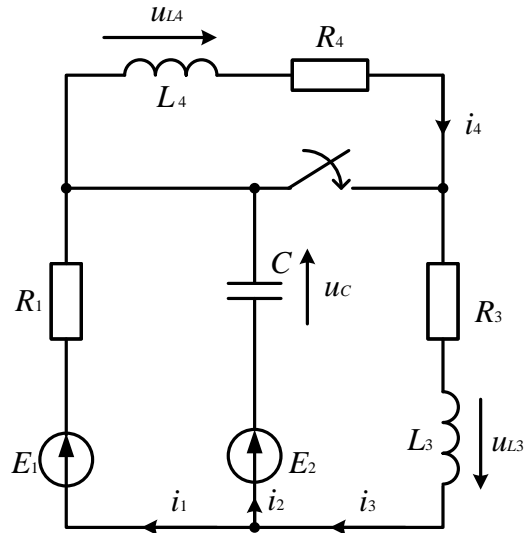


Рис. 12.3

Розв'язання:

Оскільки після комутації у колі (рис. 12.3) виникає лінія єдиного потенціалу, яка умовно розділяє кола на дві частини, аналіз перехідних процесів у яких можна проводити незалежно один від одного.

Проведемо розрахунок перехідного процесу в короткозамкненому контурі $L_4 R_4$:

$$i_4(t) = i_{4(0)} e^{-t/\tau_4} = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} e^{-tR_4/L_4} = \frac{200}{100 + 30 + 120} e^{-120t/0.2} = 0.8e^{-600t} \text{ А}$$

$$u_{L_4}(t) = L_4 \frac{di_4(t)}{dt} = 0.2 \cdot 0.8(-600)e^{-600t} = -96e^{-600t} \text{ В}$$

Виконаємо розрахунок перехідного процесу в основній частині кола.

1. Виконаємо розрахунок незалежних початкових умов.

До комутації ключ розімкнений, конденсатор заряджений, отже струм у колі протікає лише у зовнішньому контурі. Розрахуємо струми у вітці з індуктивностями та напругу на ємності в усталеному режимі до комутації:

$$i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{200}{100 + 30 + 120} = 0.8 \text{ А}$$

Величину напруги на ємності визначимо двома шляхами:

$$u_C(0^-) = E_2 - i_{3(0^-)}(R_3 + R_4) = 100 - 0.8(30 + 120) = -20 \text{ В}$$

або

$$u_C(0^-) = E_2 - E_1 + i_{1(0^-)}R_1 = 100 - 200 + 0.8 \cdot 100 = -20 \text{ В}$$

Згідно законів комутації:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = -20 \text{ В}$$

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 0.8 \text{ А}$$

2. Виконаємо розрахунки для визначення початкових умов.

Складемо систему рівнянь для зкомутовного кола в момент $t=0$.

$$\begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - i_3(0) = 0 \\ i_1(0)R_1 - u_C(0) = E_1 - E_2 \\ u_C(0) + u_{L_3}(0) + i_3(0)R_3 = E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0) + i_2(0) - 0.8 = 0 \\ 100i_1(0) + 20 = 200 - 100 \\ -20 + u_{L_3}(0) + 0.8 \cdot 30 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0) = 0.8 \\ i_2(0) = 0 \\ u_{L_3}(0) = 96 \end{cases}$$

Подиференціюємо систему рівнянь, пам'ятаючи, що

$$i_2(0) = C \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow i_2(0) = 10^{-4} \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0}$$

$$u_{L_3}(0) = L_3 \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow u_{L_3}(0) = 0.1 \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_{L_3}}{dt} \right|_{t=0} + R_3 \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ 100 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_{L_3}}{dt} \right|_{t=0} + 30 \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Вирішивши обидві системи будь-яким відомим з математики способом отримаємо наступні значення напруг, струмів та їх похідних в момент $t=0$:

$$i_1(0)=0.8\text{А} \quad i_2(0)=0 \quad i_3(0)=0.8 \text{ А} \quad u_C(0)=-20\text{В} \quad u_{L_3}(0)=96 \text{ В}$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = 960 \frac{\text{А}}{\text{с}} \quad \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 960 \frac{\text{А}}{\text{с}} \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \left. \frac{du_{L_3}}{dt} \right|_{t=0} = -2.88 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{с}}$$

3. Проведемо розрахунок усталеного режиму після комутації та визначимо вимушені складові перехідних струмів та напруг.

$$i_{1\text{вим}} = i_{3\text{вим}} = \frac{E_1}{R_1 + R_4} = \frac{200}{100 + 30} = 1.538 \text{ A}$$

$$i_{2\text{вим}} = 0$$

$$u_{\text{Свим}} = E_2 - i_{3\text{вим}} R_3 = 100 - 1.538 \cdot 30 = 53.8 \text{ В}$$

$$\text{або } u_{\text{Свим}} = E_2 - E_1 + i_{\text{вим}} R_1 = 100 - 200 + 1.538 \cdot 100 = 53.8 \text{ В}$$

$$u_{L_3\text{вим}} = 0$$

4. Для визначення коренів характеристичного рівняння скористаємось методом вхідного опору. Схема заміщення для розрахунку $Z_{\text{вх}}(p)$.

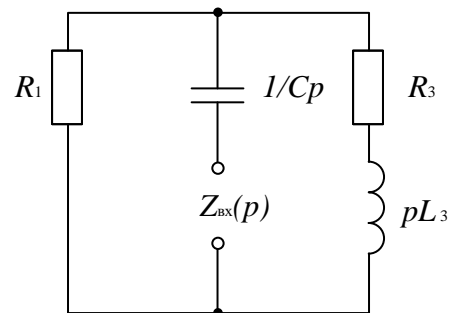


Рис. 12.4

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_3 + pL_3)}{R_1 + R_3 + pL_3} = 0$$

$$\frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_3 + pL_3)}{R_1 + R_3 + pL_3} = 0 \Rightarrow \frac{10^4}{p} + \frac{100(30 + 0.1p)}{100 + 30 + 0.1p} = 0 \Rightarrow p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5 = 0$$

Коренями отриманого характеристичного рівняння є:

$$p_1 = -200 + j300 \text{ с}^{-1} \quad p_2 = -200 - j300 \text{ с}^{-1}$$

5. Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, вільну складову перехідної функції у загальному випадку можна записати у вигляді:

$$f_{\text{віль}}(t) = (A_n \sin \omega' t + A_{n+1} \cos \omega' t) e^{-\delta t}$$

де $\omega' = 300$ – кутова частота власних коливань контуру;

$\delta = 200$ – коефіцієнт загасання.

6. Вирази для шуканих напруг і струмів в загальному вигляді.

$$i_1(t) = i_{1\text{вим}} + (A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) e^{-\delta t} = 1.538 + (A_1 \sin 300t + A_2 \cos 300t) e^{-200t};$$

$$i_2(t) = i_{2\text{ВНМ}} + (B_1 \sin \omega' t + B_2 \cos \omega' t)e^{-\delta t} = (B_1 \sin 300t + B_2 \cos 300t)e^{-200t};$$

$$i_3(t) = i_{3\text{ВНМ}} + (D_1 \sin \omega' t + D_2 \cos \omega' t)e^{-\delta t} = 1.538 + (D_1 \sin 300t + D_2 \cos 300t)e^{-200t};$$

$$u_L(t) = u_{L\text{ВНМ}} + (K_1 \sin \omega' t + K_2 \cos \omega' t)e^{-\delta t} = (K_1 \sin 300t + K_2 \cos 300t)e^{-200t};$$

$$u_C(t) = u_{C\text{ВНМ}} + (N_1 \sin \omega' t + N_2 \cos \omega' t)e^{-\delta t} = 53.8 + (N_1 \sin 300t + N_2 \cos 300t)e^{-200t}$$

7. Розрахунок постійних інтегрування.

Продиференціюємо вирази з п. 6 та запишемо їх для моменту $t=0$.

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= (-\delta(A_1 \sin \omega' t + A_2 \cos \omega' t) + \omega'(A_1 \cos \omega' t - A_2 \sin \omega' t))e^{-\delta t} = \\ &= (-200(A_1 \sin 300t + A_2 \cos 300t) + 300(A_1 \cos 300t - A_2 \sin 300t))e^{-200t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} i_1(0) = 0.8 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.8 = 1.538 + A_2 \\ 0 = 300A_1 - 200A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -0.492 \\ A_2 = -0.738 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2(0) = 0 \\ \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = 960 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = B_2 \\ 960 = 300B_1 - 200B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 3.20 \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3(0) = 0.8 \\ \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = 960 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.8 = 1.538 + D_2 \\ 960 = 300D_1 - 200D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = 2.71 \\ D_2 = -0.738 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_L(0) = 96 \\ \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = -2.88 \cdot 10^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 96 = K_2 \\ -2.88 \cdot 10^4 = 300K_1 - 200K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = -32 \\ K_2 = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(0) = -20 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 = 300N_1 - 200N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20 = 53.8 - N_2 \\ 0 = 300N_1 - 200N_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = -49.2 \\ N_2 = -73.8 \end{cases}$$

8. Отримані значення після інтегрування підставляємо у вирази п. 6.

Остаточні вирази законів змін перехідних струмів та напруг мають вигляд:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 1.538 + (-0.492 \sin 300t - 0.738 \cos 300t)e^{-200t} = \\ &= 1.538 + 0.887e^{-200t} \sin(300t - e^{j123.7^\circ}), \text{ А} \end{aligned}$$

$$i_2(t) = 3.2e^{-200t} \sin 300t, \text{ A}$$

$$i_3(t) = 1.538 + (2.71 \sin 300t - 0.738 \cos 300t)e^{-200t} = \\ = 1.538 + 2.81e^{-200t} \sin(300t - e^{j15.23^\circ}), \text{ A}$$

$$u_L(t) = (-32 \sin 300t + 96 \cos 300t)e^{-200t} = 101.2e^{-200t} \sin(300t + e^{j108.4^\circ}), \text{ B}$$

$$u_C(t) = 53.8 + (-49.2 \sin 300t - 73.8 \cos 300t)e^{-200t} = \\ = 53.8 + 88.7e^{-200t} \sin(300t - e^{j123.7^\circ}), \text{ B}$$

Перевірка за другим законом Кірхгофа

$$E_1 = i_1 R_1 + i_3 R_3 + u_L$$

Зробимо підстановку:

$$200 = 100 \left[1.538 - (0.492 \sin 300t + 0.738 \cos 300t)e^{-200t} \right] + \\ + 30 \left[1.538 + (2.71 \sin 300t - 0.738 \cos 300t)e^{-200t} \right] - (32 \sin 300t - 96 \cos 300t)e^{-200t} \Rightarrow \\ 200 \approx 200 + (0.1 \sin 300t + 0.06 \cos 300t)e^{-200t}$$

Визначення критичного значення опору R_1 .

Критичний опір – це опір при яком перехідний процес виходить аперіодичним, але граничить з коливальним процесом. Пам’ятаємо, що у випадку аперіодичного перехідного процесу корені характеристичного рівняння є від’ємними і дійсними, а для критичного випадку ще й рівними.

Отже, для знаходження критичного значення опору скористаємось виразом “вхідного опору”, записавши його у вигляді квадратного рівняння:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_1(R_3 + pL_3)}{R_1 + R_3 + pL_3} = 0$$

$$\frac{10^4}{p} + \frac{R_1(30 + 0.1p)}{R_1 + 30 + 0.1p} = 0$$

$$p^2 + p10^4 \left(0.03 + \frac{1}{R_1} \right) + 3 \cdot 10^6 \left(0.0333 + \frac{1}{R_1} \right) = 0$$

З математики відомо, що корені квадратного рівняння є рівними у випадку рівності нулю дискримінанту квадратного рівняння. Оскільки,

дискримінант перетворився на нуль, обидва кореня мають однакову величину – в колі протікає граничний аперіодичний процес. Запишемо дискримінант нашого квадратного рівняння:

$$D = b^2 - 4ac = 10^6 \left(0.03 + \frac{1}{R_1} \right)^2 - 12 \cdot 10^6 \left(0.0333 + \frac{1}{R_1} \right).$$

Прирівнявши отриманий вираз до нуля, розрахуємо значення критичного опору:

$$2.5 \cdot 10^7 \left(0.03 + \frac{1}{R_1} \right)^2 - 3 \cdot 10^6 \left(0.0333 + \frac{1}{R_1} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} \right)^2 - 6 \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{R_1} \right) - 3.1 \cdot 10^{-3} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{R_1} \right)_{\text{кр}} = 3 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{9 \cdot 10^{-4} + 31 \cdot 10^{-4}} = 10^{-2} (3.0 \pm 6.32)$$

$$\left(\frac{1}{R_1} \right)_{\text{кр}} = 9.32 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \Rightarrow R_1'_{\text{кр}} = 10.73 \text{ Ом}, R_1''_{\text{кр}} = -30.1 \text{ Ом}$$

Оскільки корінь $R_1''_{\text{кр}}$ фізично не реалізується, то єдиним коренем можемо вважати $R_1'_{\text{кр}}$.

$0 \leq R_1 \leq 10.72$ – у колі аперіодичний процес;

$R_1 > 10.72$ – у колі коливальний процес.

Розрахуємо значення коренів характеристичного рівняння при $R_1'_{\text{кр}}$:

$$\frac{10^4}{p} + \frac{10.73(30 + 0.1p)}{10.73 + 30 + 0.1p} = 0 \quad p^2 + 1232p + 3.8 \cdot 10^5 = 0$$

$$p = -616 \pm \sqrt{616^2 - 3.8 \cdot 10^5} \quad p = -616 \pm 3.12 \cdot 10^{-2} \approx -616 \text{ с}^{-1}$$

ЗАДАЧА 12.3

Виконати розрахунок перехідних струмів та напруг на реактивних елементах за заданих параметрів кола:

$$E_1 = 100 \text{ В}$$

$$E_2 = 60 \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = R_4 = 20 \text{ Ом}$$

$$L = 1 \text{ Гн}$$

$$C = 400 \text{ мкФ}$$

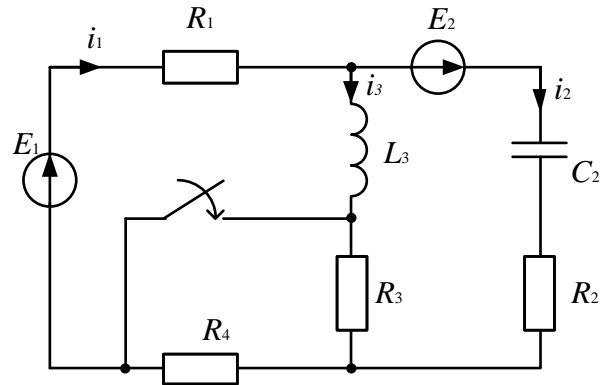


Рис. 12.5

Розв'язання:

1. Розрахунок усталеного режиму до комутації ($t=0$). Визначення незалежних початкових умов.

$$i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А}$$

$$i_2(0_-) = 0$$

$$u_C(0_-) = E_2 - R_2 i_2(0_-) + R_3 i_3(0_-) = 60 + 20 \cdot 2 = 100 \text{ В}$$

Згідно законів комутації запишемо незалежні початкові умови:

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 2 \text{ А}$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 100 \text{ В}$$

2. Розрахунок усталеного режиму після комутації ($t \rightarrow \infty$).

Після замикання ключа змінюється конфігурація схеми: опори R_3 та R_4 з'єднуються паралельно. Таким чином, схему після комутації можна зобразити наступним чином (див. рис. 12.6)

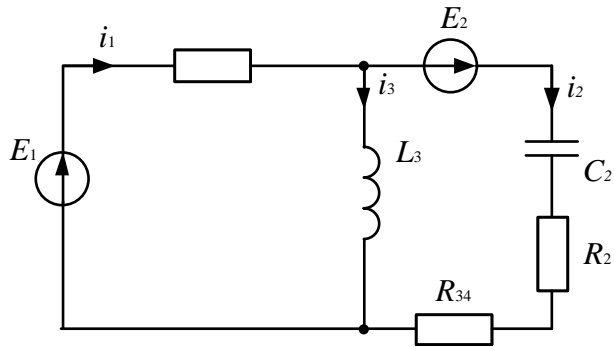


Рис. 12.6

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 10 \text{ Ом}$$

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 10 + 10 = 20 \text{ Ом}$$

Визначимо усталені струми та напруги після комутації:

$$i_{1\text{уст}} = i_{3\text{уст}} = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А}$$

$$i_{2\text{уст}} = 0$$

$$U_{C\text{ уст}} = E_2 - R_{234} i_{2\text{уст}} = 60 \text{ В}$$

$$U_{L\text{ уст}} = 0$$

Перехідний струм (напруга) відповідно до принципу суперпозиції дорівнює сумі вимушеної та вільної складових:

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{віль.}}$$

Пам'ятаємо, що вираз вільної складової $i_{\text{віль}}$ загального визначається видом кореня характеристичного рівняння p .

3. Визначення коренів характеристичного рівняння.

Для визначення коренів p скористаємось методом вхідного опору.

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{R_1 p L_2}{R_1 + p L_2} + R_{234} + \frac{1}{p C_2} = 0$$

$$\frac{30 p^2 + 2700 p + 25000}{p(10 + p)} = 0$$

$$30 p^2 + 2700 p + 25000 = 0$$

$$p^2 + 90 p + 833.3 = 0$$

$$p_{1,2} = -45 \pm 34.52$$

$$p_1 = -10.48 \quad p_2 = -79.52$$

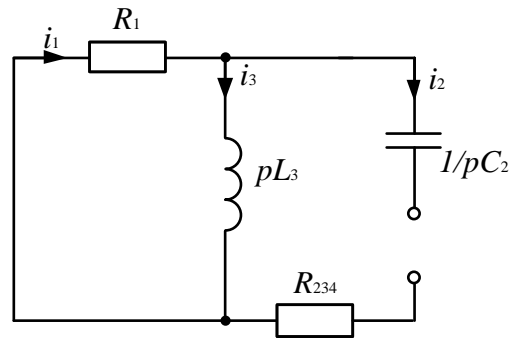


Рис. 12.7

Отримані корені – дійсні числа, отже вільну складову перехідної функції подаємо у вигляді суми експонент:

$$f_{\text{ввл}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}.$$

4. Розрахунок режиму в момент комутації ($t=0$).

Для визначення струмів та напруг в момент комутації, запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для після комутаційної схеми (рис. 21).

Врахуємо, що за законами комутації:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \\ R_1 i_1(0) + u_L(0) = E_1 \\ R_1 i_1(0) + u_C(0) + R_{234} i_2(0) = E_1 + E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + 2 \\ 10 i_1(0) + u_L(0) = 100 \\ 10 i_1(0) + 20 i_2(0) = 60 \end{cases}$$

$$i_2(0) = 1.33 \text{ А};$$

$$i_1(0) = 3.33 \text{ А};$$

$$u_L(0) = E_1 - R_1 i_1(0) = 66.66 \text{ В}.$$

Для визначення сталих інтегрування знайдемо похідні всіх струмів та напруг на реактивних елементах.

$$U_L = L_3 \frac{di_3}{dt} \Rightarrow \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \frac{U_L(0)}{L_3} = 66.66;$$

$$i_2 = C_2 \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dU_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_2(0)}{C_2} = 3325;$$

Продиференціюємо перше та третє рівняння системи:

$$\begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} \\ R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} + R_{234} \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = 66.66 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + 2 \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -332.5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -133.05;$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -66.45.$$

Продиференціюємо друге рівняння системи:

$$R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

$$\left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = -R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -10 \cdot (-66.45) = 664.5$$

5. Запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів відповідно до виду коренів характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1\text{уст}} + i_{1\text{ввл}} = i_{1\text{уст}} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{di_{1\text{уст}}}{dt} + p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2(t) = i_{2\text{уст}} + i_{2\text{ввл}} = i_{2\text{уст}} + A_3 e^{p_1 t} + A_4 e^{p_2 t} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{di_{2\text{уст}}}{dt} + p_1 A_3 e^{p_1 t} + p_2 A_4 e^{p_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3(t) = i_{3\text{уст}} + i_{3\text{ввл}} = i_{3\text{уст}} + A_5 e^{p_1 t} + A_6 e^{p_2 t} \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{di_{3\text{уст}}}{dt} + p_1 A_5 e^{p_1 t} + p_2 A_6 e^{p_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C\text{уст}} + u_{C\text{ввл}} = u_{C\text{уст}} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{du_{C\text{уст}}}{dt} + p_1 B_1 e^{p_1 t} + p_2 B_2 e^{p_2 t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_L(t) = u_{L\text{уст}} + u_{L\text{ввл}} = u_{L\text{уст}} + B_3 e^{p_1 t} + B_4 e^{p_2 t} \\ \frac{du_L}{dt} = \frac{du_{L\text{уст}}}{dt} + p_1 B_3 e^{p_1 t} + p_2 B_4 e^{p_2 t} \end{cases}$$

6. Знайдемо сталі інтегрування. Для цього запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів в момент $t=0$.

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1\text{уст}}(0) + i_{1\text{ввл}}(0) = i_{1\text{уст}}(0) + A_1 + A_2 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{1\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.33 = 10 + A_1 + A_2 \\ -66.45 = 0 - 10.48 A_1 - 79.52 A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 = -8.64 \\ A_2 = 1.97 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2(0) = i_{2\text{уст}}(0) + i_{2\text{ввл}}(0) = i_{2\text{уст}}(0) + A_3 + A_4 \\ \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{2\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 A_3 + p_2 A_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.33 = 0 + A_3 + A_4 \\ -133.05 = 0 - 10.48 A_3 - 79.52 A_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_3 = -0.43 \\ A_4 = 1.76 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_3(0) = i_{3\text{уст}}(0) + i_{3\text{ввл}}(0) = i_{3\text{уст}}(0) + A_5 + A_6 \\ \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{3\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 A_5 + p_2 A_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 10 + A_5 + A_6 \\ 66.66 = 0 - 10.48 A_5 - 79.52 A_6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_5 = -8.24 \\ A_6 = 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(0) = u_{C\text{уст}}(0) + u_{C\text{ввл}}(0) = u_{C\text{уст}}(0) + B_1 + B_2 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{C\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 B_1 + p_2 B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = 60 + B_1 + B_2 \\ 3325 = -10.45 B_1 - 79.52 B_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_1 = 94.19 \\ B_2 = -54.19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_L(0) = u_{L\text{уст}}(0) + u_{L\text{ввл}}(0) = u_{L\text{уст}}(0) + B_3 + B_4 \\ \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{L\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} + p_1 B_3 + p_2 B_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 66.66 = 0 + B_3 + B_4 \\ 664.5 = -10.48 B_3 - 79.52 B_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_3 = 86.40 \\ B_4 = -19.74 \end{cases}$$

$$i_1(t) = 10 - 8.64e^{-10.48t} + 1.97e^{-79.52t}$$

$$i_2(t) = -0.43e^{-10.48t} + 1.76e^{-79.52t}$$

$$i_3(t) = 10 - 8.24e^{-10.48t} + 0.25e^{-79.52t}$$

$$u_C(t) = 60 + 94.19e^{-10.48t} - 54.19e^{-79.52t}$$

$$u_L(t) = 86.40e^{-10.48t} - 19.74e^{-79.52t}$$

ЗАДАЧА 12.4

Виконати розрахунок перехідних вхідного струму та напруги на конденсаторі за заданих параметрів кола:

$$U = 125 \text{ В}$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

$$L_2 = 40 \text{ мГн}$$

$$C_3 = 5 \text{ мкФ}$$

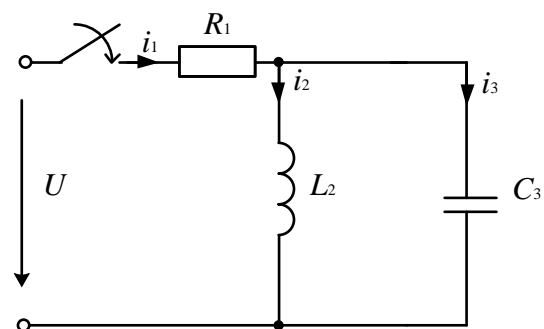


Рис. 12.8

Розв'язання:

1. Електрична рівновага кола після комутації може бути подана системою рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1(t) = i_2(t) + C \frac{du_C(t)}{dt} \\ R_1 i_1(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} = U \\ R_1 i_1(t) + u_C(t) = U \end{cases}$$

В утворені системі кожна з перехідних функцій є сумою вимушеної та вільної складових

$$i_1(t) = I_{1вум} + i_{1вїл}(t)$$

$$i_2(t) = I_{2вум} + i_{2вїл}(t)$$

$$i_3(t) = I_{3вум} + i_{3вїл}(t)$$

$$u_L(t) = U_{Lвум} + u_{Lвїл}(t)$$

$$u_C(t) = U_{Cвум} + u_{Cвїл}(t)$$

2. З аналізу усталеного режиму роботи кола після комутації розрахуємо вимушені складові перехідних функцій

$$I_{3вум} = 0$$

$$I_{1вум} = I_{2вум} = \frac{U}{R_1} = \frac{125}{100} = 1.25 \text{ А}$$

$$U_{Cвум} = 0$$

$$U_{Lвум} = 0$$

3. Аналіз вільного режиму роботи кола, який утворюється шляхом заміни джерел енергії у колі після комутації їх внутрішніми опорами, дозволяє встановити закон зміни перехідної функції.

Запишемо систему рівнянь відносно вільних складових перехідних функцій та перепишемо її відносно однієї змінної.

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{1вїл}(t) = i_{2вїл}(t) + C \frac{du_{Cвїл}(t)}{dt} \\ R_1 i_{1вїл}(t) + L \frac{di_{2вїл}(t)}{dt} = 0 \\ R_1 i_{1вїл}(t) + u_{Cвїл}(t) = 0 \\ i_{3вїл}(t) = C \frac{du_{Cвїл}(t)}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{di_{1вїл}(t)}{dt} = \frac{di_{2вїл}(t)}{dt} + \frac{di_{3вїл}(t)}{dt} \\ \frac{di_{2вїл}(t)}{dt} = -\frac{R_1 i_{1вїл}(t)}{L} = -\frac{R_1}{L} \left(-\frac{u_{Cвїл}(t)}{R_1} \right) = \frac{u_{Cвїл}(t)}{L} \\ i_{1вїл}(t) = -\frac{u_{Cвїл}(t)}{R_1} \Rightarrow \frac{di_{1вїл}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} \frac{du_{Cвїл}(t)}{dt} \\ \frac{di_{3вїл}(t)}{dt} = C \frac{d^2 u_{Cвїл}(t)}{dt^2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

Від утвореного диференційного рівняння другого порядку перейдемо до його характеристичного та розрахуємо корені:

$$-\frac{1}{R_1} \frac{du_{C_{вкл}}(t)}{dt} = \frac{u_{C_{вкл}}(t)}{L} + C \frac{d^2 u_{C_{вкл}}(t)}{dt^2}$$

$$C \frac{d^2 u_{C_{вкл}}(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \frac{du_{C_{вкл}}(t)}{dt} + \frac{u_{C_{вкл}}(t)}{L} = 0$$

$$Cp^2 + \frac{1}{R_1} p + \frac{1}{L} = 0$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000$$

Для розрахунку коренів характеристичного рівняння можливе застосування методу вхідного опору:

$$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{R_1 p L_2}{R_1 + p L_2} + \frac{1}{p C_3} = 0$$

$$\frac{40 \cdot 100 \cdot 10^{-3} p}{100 + 10^{-3} p} + \frac{10^6}{5 p} = 0$$

$$\frac{4p^2 + 8000p + 2 \cdot 10^7}{(100 + 0.04p)p} = 0$$

$$4p^2 + 8000p + 2 \cdot 10^7 = 0$$

$$p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6 = 0$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000 = -\delta \pm j\omega'$$

$$\delta = 1000 \quad \omega' = 2000$$

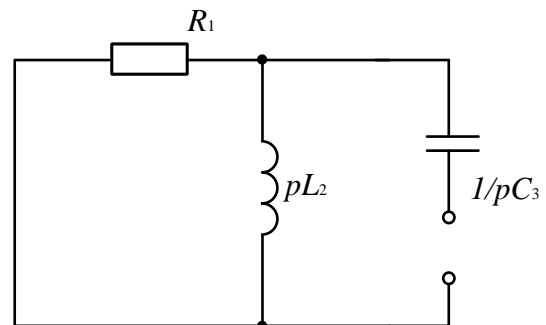


Рис. 12.9

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то вільні складові перехідних функцій буде змінюватись за законом затухаючої синусоїди ($f_{вкл}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega't + \alpha)$).

$$i_1(t) = I_{1\text{вум}} + A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \alpha_1)$$

$$i_2(t) = I_{2\text{вум}} + A_2 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \alpha_2)$$

$$i_3(t) = I_{3\text{вум}} + A_3 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \alpha_3)$$

$$u_L(t) = U_{L\text{вум}} + B_2 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \beta_2)$$

$$u_C(t) = U_{C\text{вум}} + B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega't + \beta_1)$$

4. Для розрахунку невідомих сталих інтегрування та початкових фаз кожної із синусоїд виконаємо розрахунок початкових умов та диференціалів перехідних функцій у момент комутації.

Незалежні початкові умови розраховуються для кола до комутації ($t=0$)

$$i_2(0_-) = 0$$

$$u_C(0_-) = 0$$

Залежні початкові умови розраховуються в момент комутації ($t=0$).

Для визначення струмів та напруг в момент комутації, запишемо систему рівнянь за законами Кирхгофа для після комутаційної схеми (рис. 12.10). Врахуємо, що згідно законів комутації мають місце наступні незалежні початкові умови:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) \\ R_1 i_1(0) + u_L(0) = U \Rightarrow \\ R_1 i_1(0) + u_C(0) = U \end{cases}$$

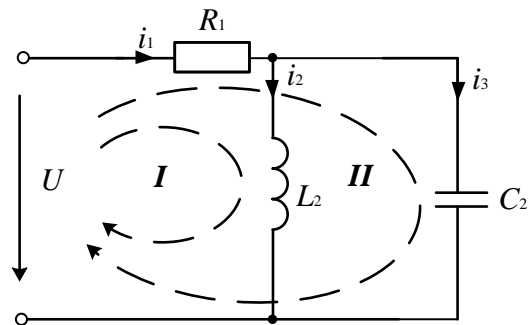


Рис. 12.10

$$\begin{cases} i_1(0) = \frac{U - u_C(0)}{R_1} = \frac{125 - 0}{100} = 1.25 \\ i_3(0) = i_1(0) - i_2(0) = 1.25 - 0 = 1.25 \\ u_L(0) = U - R_1 i_1(0) = 125 - 100 \cdot 1.25 = 0 \end{cases}$$

Для визначення сталих інтегрування, знайдемо диференціали всіх струмів та напруг на реактивних елементах.

$$u_L = L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L_2} = 0;$$

$$i_3 = C_3 \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_3(0)}{C_3} = 25 \cdot 10^4;$$

$$R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{R_1} \cdot \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{25 \cdot 10^4}{100} = -2500$$

$$R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \left. \frac{du_L}{dt} \right|_{t=0} = -R_1 \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -25 \cdot 10^4$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \left. \frac{di_3}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - \left. \frac{di_2}{dt} \right|_{t=0} = -2500$$

5. Запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів відповідно до виду коренів характеристичного рівняння.

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{1\text{вум}} + i_{1\text{віл}} = i_{1\text{вум}} + A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha_1) \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{1\text{вум}}}{dt} \right|_{t=0} - \delta A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha_1) + \omega A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C\text{вум}} + u_{C\text{віл}} = u_{C\text{вум}} + B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta_1) \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{C\text{вум}}}{dt} \right|_{t=0} - \delta B_1 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta_1) + \omega B_1 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \beta_1) \end{cases}$$

6. Знайдемо сталі інтегрування. Для цього запишемо загальні вирази для шуканих напруг і струмів в момент $t=0$.

Для струму $i_1(t)$:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1\text{вум}}(0) + i_{1\text{віл}}(0) = i_{1\text{вум}}(0) + A_1 \sin \alpha_1 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\delta A_1 \sin \alpha_1 + \omega A_1 \cos \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1.25 = 1.25 + A_1 \sin \alpha_1 \\ -2500 = -1000 A_1 \sin \alpha_1 + 2000 A_1 \cos \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A_1 \sin \alpha_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 \neq 0 \\ \alpha_1 = \{0; \pi\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{-2500}{2000 \cos \alpha_1} = \frac{-2500}{2000 \cos \pi} = 1.25 \\ \alpha_1 = \{0; \pi\} \end{cases}$$

Для напруги на конденсаторі $u_C(t)$:

$$\begin{cases} u_C(0) = u_{C\text{вум}}(0) + u_{C\text{віл}}(0) = u_{C\text{вум}}(0) + B_1 \sin \beta_1 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{du_{C\text{уст}}}{dt} \right|_{t=0} - \delta B_1 \sin \beta_1 + \omega B_1 \cos \beta_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 0 + B_1 \sin \beta_1 \\ 25 \cdot 10^4 = -1000 B_1 \sin \beta_1 + 2000 B_1 \cos \beta_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$B_1 \sin \beta_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} B_1 \neq 0 \\ \sin \beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 125 \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

Результуючі перехідні функції:

$$i_1(t) = 1.25 + 1.25e^{-\delta t} \sin(\omega t + \pi)$$

$$u_C(t) = 125e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

Побудова графіків:

$t \cdot 10^{-3}$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$u_C(t)$	0	63.8	41.8	3.94	-12.8	-9.84	-1.74	2.48	2.26	0.57	-0.46

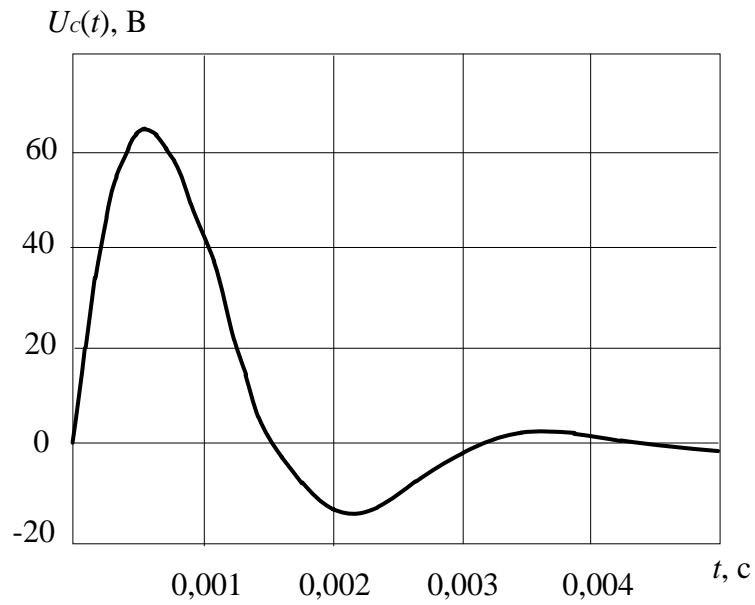


Рис. 12.11

Практичне заняття 13.

Розрахунок перехідного процесу у колі з двома накопичувачами енергії при дії синусоїдних джерел енергії

ЗАДАЧА 13.1

Виконати розрахунок перехідних струму на вході кола за заданих параметрів кола:

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin(10^3 t + 45^\circ) \text{ В}$$

$$R = 4 \text{ кОм};$$

$$L_1 = L_2 = 1 \text{ Гн};$$

$$C_1 = 0.5 \text{ мкФ};$$

$$C_3 = 1 \text{ мкФ};$$

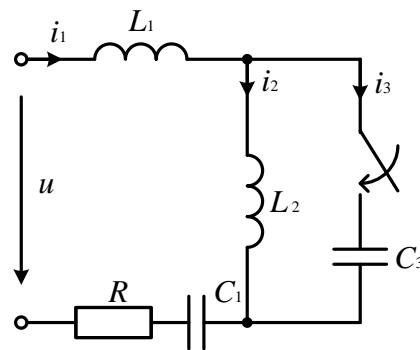


Рис. 13.1

Розв'язання:

Запишемо значення реактивних опорів:

$$X_{L_1} = X_{L_2} = \omega L = 1000 \cdot 1 = 1000 \text{ Ом} = 1 \text{ кОм}$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} = 2000 \text{ Ом}$$

$$X_{C_3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{10^3} \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 1000 \text{ Ом}$$

Оскільки $B_{L_2} = B_{C_3}$, то в паралельному контурі має місце резонанс струмів.

Отже, до комутації $i_1(0_-) = 0$; $u_{C_1}(0_-) = 0$; $i_2(0_-) = -0.1 \text{ А}$

$$i_2(0_-) = \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t + \psi_\kappa - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{100\sqrt{2}}{1000} \sin(10^3 t + 45^\circ - 90^\circ) = 0.1\sqrt{2} \sin(10^3 t - 45^\circ), \text{ А}$$

Оскільки енергія електричного та магнітного полів не може змінюватись стрибком, то струм через індуктивності

$$L(i_1(0_-) + i_2(0_-)) = 2Li_1(0) \Rightarrow i_1(0) = \frac{1}{2}(i_1(0_-) + i_2(0_-)) = -0.05 \text{ А}$$

та напруги на ємності $u_{C_1}(0) = u_{C_1}(0_-) = 0$ мають значення, яке вони мали безпосередньо до комутації.

Обійдемо контур за II законом Кірхгофа в момент комутації та визначимо:

$$u(0) = i_1(0)R + u_{C_1}(0) + 2L \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \sqrt{2} \sin 45^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} - 4 \cdot 10^3 \cdot 0.05 \Rightarrow$$

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \left(100\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot 10^3 \cdot 0.05 \right) = 150 \frac{\text{A}}{\text{с}}.$$

Розглянемо усталений режим після комутації ($t \rightarrow \infty$). Оскільки $2X_L = X_{C_1}$, то в післякомутаційному колі має місце резонанс навантажень, отже повний опір кола суто активний. Визначимо вимушену складову вхідного струму, її похідну та їх значення в момент $t=0$.

$$i_{\text{ввм}} = \frac{u}{R} = 0.025\sqrt{2} \sin(10^3 t + 45^\circ), \text{ A} \Rightarrow i_{\text{ввм}}(0) = 0.025\sqrt{2} \sin 45^\circ = 0.025 \text{ A}.$$

$$\frac{di_{\text{ввм}}}{dt} = 0.025\sqrt{2} \cdot 10^3 \cos(10^3 t + 45^\circ) = 25\sqrt{2} \cos(10^3 t + 45^\circ) \frac{\text{A}}{\text{с}} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{di_{\text{ввм}}}{dt} \right|_{t=0} = 25\sqrt{2} \cos 45^\circ = 25 \frac{\text{A}}{\text{с}}.$$

Запишемо характеристичне рівняння та розрахуємо його корені.

$$p^2 + \frac{pR}{2L} + \frac{1}{2LC_1} = 0 \Rightarrow p^2 + \frac{p \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}} = 0 \Rightarrow p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6 = 0$$

$$p_{1,2} = -10^3 \pm \sqrt{10^6 - 10^6} = -10^3 \text{ с}^{-1} - \text{корені дійсні та кратні.}$$

Враховуючи значення коренів характеристичного рівняння запишемо загальний вираз для перехідного струму та його диференціал:

$$i_1(t) = i_{\text{ввм}} + i_{\text{ввл}} = i_{\text{ввм}} + (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t},$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{di_{\text{ввм}}}{dt} + e^{-\delta t} (-\delta_1 (A_1 + A_2 t) + A_2).$$

Складемо систему рівнянь для моменту $t=0$ та визначимо сталі інтегрування.

$$\begin{cases} i_1(0) = i_{1\text{ВИМ}}(0) + A_1 \\ \left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{di_{1\text{ВИМ}}}{dt} \right|_{t=0} - \delta(A_1 + A_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.05 = 0.025 + A_1 \\ 150 = 25 - 1000(-0.075 + A_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -0.075 \\ A_2 = 50 \end{cases}$$

Вираз закону змінення вхідного струму має вигляд:

$$i_1(t) = 0.025\sqrt{2} \sin(10^3 t + 45^\circ) + (-0.075 + 50t)e^{-1000t}, \text{ А.}$$

Операторний метод розрахунку перехідного процесу в електричному колі

ЗАДАЧА 14.1

Виконати розрахунок перехідного струму $i(t)$ за заданих параметрів

кола:

$$e(t) = 200\sin(100t + 30^\circ) \text{ В}$$

$$R = 75 \text{ Ом}$$

$$R_0 = 125 \text{ Ом}$$

$$C = 100 \text{ мкФ}$$

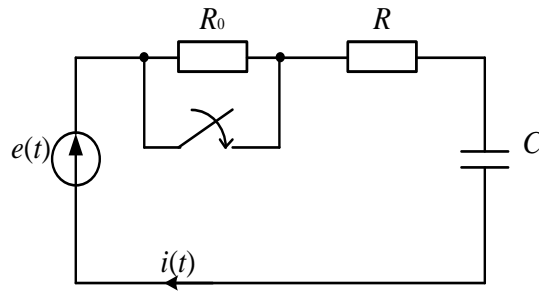


Рис. 14.1

Розв'язання:

Розрахунок перехідного процесу в колі будемо проводити символічним методом.

На вході діє синусоїдна ЕРС, її комплексне амплітудне значення має вигляд: $\dot{E}_m = 200e^{30j} \text{ В}$.

Визначимо значення струму та напруги на ємності до комутації:

$$\dot{I}_m(0_-) = \frac{\dot{E}_m}{R_0 + R - \frac{j1}{\omega C}} = \frac{200e^{30j}}{125 + 75 - \frac{j1}{100 \cdot 10^{-4}}} = 0.894e^{56.6j} \text{ А}$$

$$\dot{U}_{Cm}(0_-) = \dot{I}_m(0_-) \left(\frac{-j}{\omega C} \right) = 0.894e^{56.6j} \left(\frac{-j}{100 \cdot 10^{-4}} \right) = 0.84e^{-33.4} \text{ В}$$

Перейдемо від комплексу до миттєвого значення напруги на ємності:

$$u_C(0_-) = 89.4\sin(100t - 33.4^\circ) \text{ В}$$

За II законом комутації:

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 89.4\sin(-33.4^\circ) = -49.2 \text{ В}$$

Для зручності визначення перехідного струму (напруги) його умовно поділяють на вимушену та вільну складові. Вимушену складову розраховуємо з усталеного режиму після комутації.

$$\dot{i}_{\text{тввим}} = \frac{\dot{E}_m}{R - \frac{j1}{\omega C}} = \frac{200e^{30j}}{75 - j100} = 1.6e^{83.13j} \text{ А}$$

$$\dot{U}_{\text{Стввим}} = \dot{i}_{\text{Стввим}} \left(-\frac{j1}{\omega C} \right) = 1.6e^{83.13j} \cdot 100e^{-90j} = 160e^{-6.87j} \text{ В}$$

Перейдемо до миттєвих значень:

$$i_{\text{вим}}(t) = 1.6 \sin(100t + 83.13^\circ) \text{ А}$$

$$u_{\text{Свим}}(t) = 160 \sin(100t - 6.87^\circ) \text{ В}$$

Розрахуємо величини вимушених складових струму та напруги в момент комутації ($t=0$):

$$i_{\text{вим}}(0) = 1.6 \sin(83.13^\circ) = 1.58 \text{ А}$$

$$u_{\text{Свим}}(0) = 160 \sin(-6.87^\circ) = -19.14 \text{ В.}$$

Вільні складові перехідних функцій протікають в після комутаційному колі лише за рахунок енергії, накопиченої на реактивних елементах до комутації (при відсутності зовнішніх джерел енергії). Для визначення $i_{\text{віль}}$ та $u_{\text{Свіль}}$ скористаємось операторним методом. Операторна схема заміщення представлена на рис. 14.2.

Визначимо значення вільної складової при $t=0$:

$$u_{\text{Свіль}}(0) = u_{\text{С}}(0) - u_{\text{Свим}}(0) = -49.2 + 19.14 = -30.1 \text{ В}$$

Відповідно до схеми заміщення, розрахуємо операторний струм за законом Ома:

$$I_{\text{віль}}(p) = \frac{-u_{\text{Свіль}}(0)}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{30.1}{75 + \frac{1}{p \cdot 10^4}} = \frac{0.4}{p + 133.3}.$$

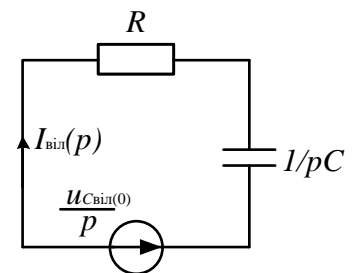


Рис. 14.2

Перейдемо від зображення до оригіналу:

$$i_{\text{вил}}(t) = 0.4e^{-133.3t} \text{ А}$$

Запишемо закон зміни перехідного струму в колі:

$$i(t) = i_{\text{вил}}(t) + i_{\text{вил}}(t) = 1.6\sin(100t + 83.1^\circ) + 0.4e^{-133.3t} \text{ А.}$$

Задача 14.2

Виконати розрахунок перехідного струму через індуктивність та напругу на ній за заданих параметрів кола:

$$U = 120 \text{ В}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом}$$

$$L_3 = 50 \text{ мГн}$$

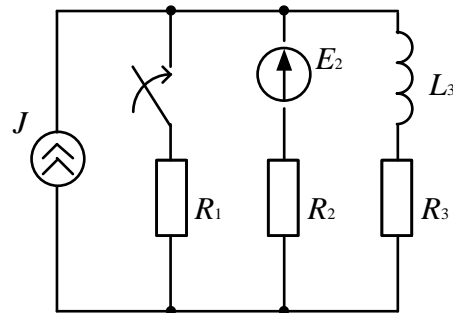


Рис. 14.3

Розв'язання:

Виконаємо розрахунок усталеного режиму до комутації, скориставшись методом контурних струмів:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_I(0_-) - R_3I_{II}(0_-) = E_2 \\ I_{II}(0_-) = J \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_I(0_-) = \frac{E_2 + R_3J}{R_1 + R_3} = \frac{120 + 60}{20} = 9$$

$$i_3(0_-) = I_I(0_-) = 9 \text{ А.}$$

Отже, згідно першого закону

комутації

$$i_3(0) = i_3(0_-) = 9 \text{ А.}$$

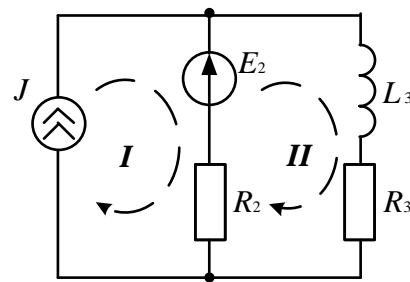


Рис. 14.4

Представимо після комутаційну схему у вигляді операторної схеми заміщення та визначимо операторні зображення струмів.

На схемі заміщення окремою ЕРС зображена внутрішня ЕРС індуктивності напрямом якої збігається із напрямком початкового струму:

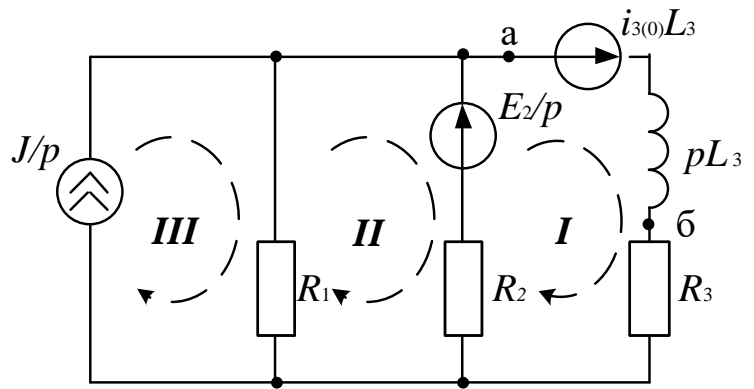


Рис. 14.5

Складемо систему рівнянь за методом контурних струмів для їх операторних зображень:

$$\begin{cases} (R_2 + R_3 + pL_3) \cdot I_I(p) - R_2 \cdot I_{II}(p) = \frac{E_2}{p} + i_3(0)L_3 \\ -R_2 \cdot I_I(p) + (R_1 + R_2) \cdot I_{II}(p) - R_1 \cdot I_{III}(p) = -\frac{E_2}{p} \\ I_{III}(p) = \frac{J}{p} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (20 + 0.05p) \cdot I_I(p) - 10 \cdot I_{II}(p) = \frac{120}{p} + 0.45 \\ -10 \cdot I_I(p) + 20 \cdot I_{II}(p) = -\frac{60}{p} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 + 0.05p & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} = 300 + p$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{120}{p} + 0.45 & -10 \\ -\frac{60}{p} & 20 \end{vmatrix} = \frac{9p + 1800}{p}$$

$$I_I(p) = I_3(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{9p + 1800}{p(300 + p)} = \frac{H(p)}{F(p)}$$

Для отримання оригіналу скористаємось теоремою розкладання:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{H(p_k)}{F'(p_k)} e^{p_k t}$$

Знайдемо корені рівняння:

$$F(p) = 0 \Rightarrow p(300 + p) = 0$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -300.$$

$$H(p_1) = 9 \cdot 0 + 1800 = 1800$$

$$F'(p_1) = 300 + 2p = 2 \cdot 0 + 300 = 300$$

$$H(p_2) = 9 \cdot (-300) + 1800 = -900$$

$$F'(p_2) = 300 + 2p = 2 \cdot (-300) + 300 = -300$$

Запишемо вираз для перехідного струму через індуктивність:

$$i_3(t) = \frac{H(p_1)}{F'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{H(p_2)}{F'(p_2)} e^{p_2 t} = 6 + 3e^{-300t}.$$

Для знаходження напруги на індуктивності запишемо її зображення, що відповідає напрузі між точками **a-b**.

$$U_L(p) = U_{a\bar{b}}(p) = -i_{3(0)} L_3 + p L_3 \cdot I_3(p) = -0.45 + 0.05p \cdot \frac{9p + 1800}{p(300 + p)}$$

$$U_L(p) = \frac{-45}{300 + p}$$

Для визначення оригіналу операторного зображення $U_L(p)$ скористаємось таблицею оригіналів (див. табл. 2.1)

Оскільки $e^{\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{p - \alpha}$, то оригінал знаходимо у вигляді

$$u_L(t) = -45e^{-300t}.$$

Задача 14.3

Виконати розрахунок перехідних струмів та напруг на реактивних елементах за заданих параметрів кола:

$E_1=200$ В
 $E_2=100$ В
 $R_1=100$ Ом
 $R_3=30$ Ом
 $R_4=20$ Ом
 $L_3=0.1$ Гн
 $L_4=0.2$ Гн
 $C=100$ мкФ

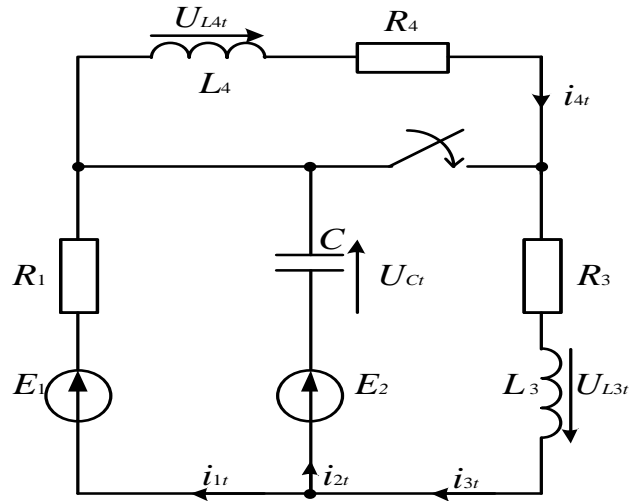


Рис. 14.6

Розв'язання:

Проведемо розрахунок кола операторним методом для основного контуру, відкинувши короткозамкнений контур L_4R_4 , та порівняємо отримані вирази з результатами задачі 12.2.

Початкові значення струму через індуктивність та напруги на ємності візьмемо з задачі 12.2.:

$$u_C(0) = -20 \text{ В}; \quad i_3(0) = 0.8 \text{ А.}$$

Операторна схема заміщення представлена на рис. 14.7.

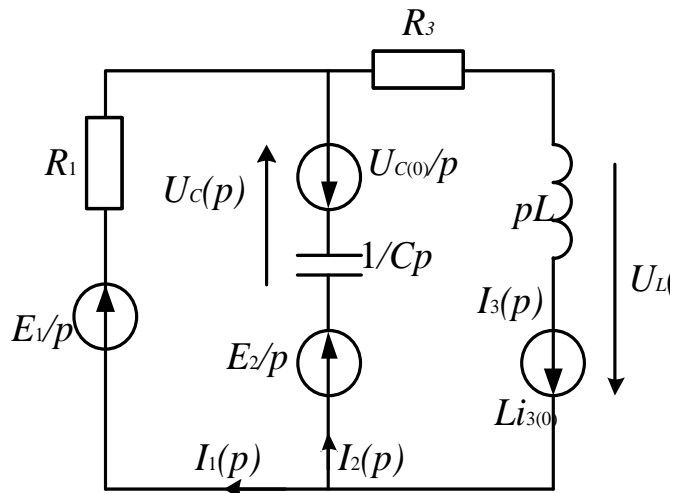


Рис. 14.7

Скориставшись методом контурних струмів, складемо для неї систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1(p)Z_{11}(p) + I_3(p)Z_{13}(p) = E_{11}(p) \\ I_1(p)Z_{31}(p) + I_3(p)Z_{33}(p) = E_{33}(p) \end{cases}, \text{ де}$$

$$Z_{11}(p) = R_1 + \frac{1}{pC} = 100 + \frac{10^4}{p} \text{ Ом} \quad \text{– власні контурні опори;}$$

$$Z_{33}(p) = R_3 + pL_3 + \frac{1}{pC} = 30 + 0.1p + \frac{10^4}{p} \text{ Ом}$$

$$Z_{13}(p) = Z_{31}(p) = -\frac{1}{pC} = -\frac{10^4}{p} \text{ Ом} \quad \text{– взаємні контурні опори;}$$

$$E_{11}(p) = \frac{E_1}{p} - \frac{E_2}{p} + \frac{u_c(0)}{p} = \frac{200}{p} - \frac{100}{p} - \frac{20}{p} = \frac{80}{p} \text{ В} \cdot \text{с}$$

$$E_{33}(p) = \frac{E_2}{p} - \frac{u_c(0)}{p} + L_3 i_3(0) = \frac{100}{p} - \frac{20}{p} + 0.1 \cdot 0.8 = \frac{120}{p} + 0.08 \text{ В} \cdot \text{с} \quad \text{– контурні}$$

ЕРС.

Визначники, записаної системи рівнянь:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 100 + \frac{10^4}{p} & -\frac{10^4}{p} \\ -\frac{10^4}{p} & 30 + 0.1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{p} (10p^2 + 4 \cdot 10^3 p + 1.3 \cdot 10^6)$$

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} \frac{80}{p} & -\frac{10^4}{p} \\ \frac{120}{p} + 0.08 & 30 + 0.1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{p^2} (8p^2 + 3.2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6)$$

$$\Delta_3(p) = \begin{vmatrix} 100 + \frac{10^4}{p} & \frac{80}{p} \\ -\frac{10^4}{p} & \frac{120}{p} + 0.08 \end{vmatrix} = \frac{1}{p^2} (8p^2 + 12.8 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6)$$

Операторне зображення струму першої гілки $I_1(p)$ збігається з $I_{11}(p)$, а третьої $I_3(p)$ – з контурним струмом $I_{33}(p)$:

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{8p^2 + 3.2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6}{p(10p^2 + 4 \cdot 10^3 p + 1.3 \cdot 10^6)} = \frac{0.8p^2 + 320p + 2 \cdot 10^5}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} = \frac{H_1(p)}{F(p)}$$

$$I_3(p) = \frac{\Delta_3(p)}{\Delta(p)} = \frac{8p^2 + 12.8 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^6}{p(10p^2 + 4 \cdot 10^3 p + 1.3 \cdot 10^6)} = \frac{0.8p^2 + 1.28 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} = \frac{H_3(p)}{F(p)}$$

Операторне зображення струму у другій гілці знаходимо за першим законом Кірхгофа:

$$I_2(p) = I_3(p) - I_1(p) = \frac{960p}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} = \frac{H_2(p)}{F(p)}.$$

На операторній схемі заміщення ділянки, які заміщають індуктивність та ємність включають власні внутрішні ЕРС, тому

$$\begin{aligned} U_L(p) &= I_3(p)pL - Li_{3(0)} = \frac{(0.8p^2 + 1.28 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)0.1p}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} - 0.1 \cdot 0.8 = \\ &= \frac{96(p + 100)}{p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5} \cdot \frac{p}{p} = \frac{H_L(p)}{F(p)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_C(p) &= \frac{I_2(p)}{pC} + \frac{u_{C(0)}}{p} = \frac{9.6 \cdot 10^6}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} - \frac{20}{p} = \\ &= \frac{-20p^2 - 8 \cdot 10^3 p + 7 \cdot 10^6}{p(p^2 + 400p + 1.3 \cdot 10^5)} = \frac{H_C(p)}{F(p)}. \end{aligned}$$

Слід зауважити, що при приведенні до спільного знаменника складові з вищими ступенями p обов'язково повинні взаємно скорочуватись, в протилежному випадку не будуть виконуватись граничні відношення.

Для всіх отриманих зображень струмів та напруг вираз знаменника – однаковий, прирівняємо його до нуля та знайдемо корені:

$$G(p)=0; \quad p(p^2+400p+1.3 \cdot 10^5)=0; \quad p_1=0; \quad p_{2,3}=-200 \pm j300 \text{ с}^{-1}$$

Похідна знаменника та її значення для всіх коренів наступні:

$$G'(p)=3p^2+800p+1.3 \cdot 10^5;$$

Проведемо розрахунок значень чисельників струмів і напруг та похідної знаменника для всіх коренів:

$$G'(p_1)=1.3 \cdot 10^5;$$

$$\begin{aligned} G'(p_2) &= 3 \cdot 10^4(-2 + j3)^2 + 8 \cdot 10^4(-2 + j3) + 1.3 \cdot 10^5 = 10^5(-1.8 - j1.2) = \\ &= 2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'(p_3) &= 3 \cdot 10^4(-2 - j3)^2 + 8 \cdot 10^4(-2 - j3) + 1.3 \cdot 10^5 = 10^5(-1.8 + j1.2) = \\ &= 2.16 \cdot 10^5 e^{j146.3^\circ} \end{aligned}$$

- для струму у першій гілці:

$$F_1(p)=0.8p^2+320p+2\cdot 10^5;$$

$$F_1(p_1)=2\cdot 10^5$$

$$F_1(p_2) = 0.8\cdot 10^4(-2 + j3)^2 + 3.2\cdot 10^4(-2 + j3) + 2\cdot 10^5 = 9.6\cdot 10^4$$

$$F_1(p_3) = 0.8\cdot 10^4(-2 + j3)^2 + 3.2\cdot 10^4(-2 - j3) + 2\cdot 10^5 = 9.6\cdot 10^4$$

- для струму у другій гілці:

$$F_2(p)=960p;$$

$$F_2(p_1)=0$$

$$F_2(p_2) = 9.6\cdot 10^4(-2 + j3) = 10^5(-1.92 + j2.88) = 3.46\cdot 10^5 e^{j123.7^\circ}$$

$$F_2(p_3) = 9.6\cdot 10^4(-2 - j3) = 10^5(-1.92 + j2.88) = 3.46\cdot 10^5 e^{-j123.7^\circ}$$

- для струму у третій гілці:

$$F_3(p)=0.8p^2+1.28\cdot 10^3p+2\cdot 10^5;$$

$$F_3(p_1)=2\cdot 10^5$$

$$F_3(p_2) = 0.8\cdot 10^4(-2 + j3)^2 + 1.28\cdot 10^5(-2 + j3) + 2\cdot 10^5 = 10^5(-0.96 + j2.88) = 3.04\cdot 10^5 e^{j108.4^\circ}$$

$$F_3(p_3) = 0.8\cdot 10^4(-2 - j3)^2 + 1.28\cdot 10^5(-2 - j3) + 2\cdot 10^5 = 10^5(-0.96 - j2.88) = 3.04\cdot 10^5 e^{-j108.4^\circ}$$

- для напруги на індуктивності:

$$F_L(p)=96(p+100)p;$$

$$F_L(p_1)=0$$

$$F_L(p_2) = 9.6\cdot 10^5(-2 + j3)(-2 + j3 + 1) = 10^6(-6.72 - j8.64) = 1.095\cdot 10^7 e^{-j127.9^\circ}$$

$$F_L(p_3) = 9.6\cdot 10^5(-2 - j3)(-2 - j3 + 1) = 10^6(-6.72 + j8.64) = 1.095\cdot 10^7 e^{j127.9^\circ}$$

- для напруги на ємності:

$$F_C(p)=-20p^2-8\cdot 10^3p+7\cdot 10^6;$$

$$F_C(p_1)=7\cdot 10^6$$

$$F_C(p_2) = -2\cdot 10^5(-2 + j3)^2 - 8\cdot 10^5(-2 + j3) + 7\cdot 10^6 = 9.6\cdot 10^6$$

$$F_C(p_3) = -2\cdot 10^5(-2 - j3)^2 - 8\cdot 10^5(-2 - j3) + 7\cdot 10^6 = 9.6\cdot 10^6$$

Підставивши значення отриманих комплексних коефіцієнтів у формулу розкладання перейдемо до оригіналів миттєвих струмів та напруг:

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{2 \cdot 10^5}{1.3 \cdot 10^5} + \frac{0.96 \cdot 10^5 e^{p_2 t}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} + \frac{0.96 \cdot 10^5 e^{p_3 t}}{2.16 \cdot 10^5 e^{j146.3^\circ}} = \\
&= 1.538 + 2.444 e^{-200t} \operatorname{Re}(e^{j(300t+146.3^\circ)}) = 1.538 + 0.888 e^{-200t} \cos(300t + 146.3^\circ) = \\
&= 1.538 + 0.888 e^{-200t} \sin(300t - 123.7^\circ) \text{ A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2(t) &= \frac{3.46 \cdot 10^5 e^{j123.7^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} e^{p_2 t} + \frac{3.46 \cdot 10^5 e^{-j123.7^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} e^{p_3 t} = 2 \cdot 1.602 e^{-200t} \operatorname{Re}(e^{j(300t-90^\circ)}) = \\
&= 3.2 e^{-200t} \cos(300t - 90^\circ) = 3.2 e^{-200t} \sin 300t, \text{ A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_3(t) &= \frac{2 \cdot 10^5}{1.3 \cdot 10^5} + \frac{3.04 \cdot 10^5 e^{j108.4^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} e^{p_2 t} + \frac{3.04 \cdot 10^5 e^{-j108.4^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{j146.3^\circ}} e^{p_3 t} = \\
&= 1.538 + 2 \cdot 1.407 e^{-200t} \operatorname{Re}(e^{j(300t-105.3^\circ)}) = 1.538 + 2.81 e^{-200t} \cos(300t - 105.3^\circ) = \\
&= 1.538 + 2.81 e^{-200t} \sin(300t - 15.3^\circ), \text{ A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_L(t) &= \frac{1.095 \cdot 10^7 e^{-j127.9^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} e^{p_2 t} + \frac{1.095 \cdot 10^7 e^{j127.9^\circ}}{2.16 \cdot 10^5 e^{j146.3^\circ}} e^{p_3 t} = 2 \cdot 50.7 e^{-200t} \operatorname{Re}(e^{j(300t+18.4^\circ)}) = \\
&= 101.4 e^{-200t} \cos(300t + 18.4^\circ) = 101.4 e^{-200t} \sin(300t + 108.4^\circ), \text{ B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= \frac{7 \cdot 10^6}{1.3 \cdot 10^5} + \frac{9.6 \cdot 10^6 e^{p_2 t}}{2.16 \cdot 10^5 e^{-j146.3^\circ}} + \frac{9.6 \cdot 10^6 e^{p_3 t}}{2.16 \cdot 10^5 e^{j146.3^\circ}} = \\
&= 53.8 + 2 \cdot 44.4 e^{-200t} \operatorname{Re}(e^{j(300t+146.3^\circ)}) = 53.8 + 88.9 e^{-200t} \cos(300t + 146.3^\circ) = \\
&= 53.8 + 88.9 e^{-200t} \sin(300t - 123.7^\circ), \text{ B}
\end{aligned}$$

Практичне заняття 15.

Використання інтеграла Дюамеля для розрахунку перехідного процесу

ЗАДАЧА 15.1

На вхід кола рис. 15.1 подана напруга $u(t) = 80e^{-100t}$ В.

Параметри схеми:

$$R=10 \text{ Ом}$$

$$L=0.05 \text{ Гн}$$

Виконати розрахунок напруг на елементах.

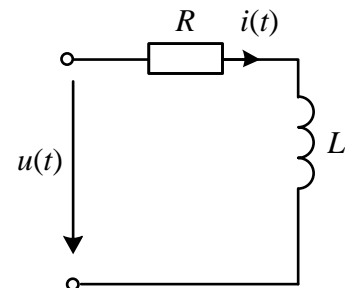


Рис. 15.1

Розв'язання:

Коли коло RL вмикається під дію постійної напруги, то струм в ньому змінюється за законом

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Отже, перехідна провідність

$$y(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = 0.1(1 - e^{-200t}),$$

$$y(t-x) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-x)} \right) = 0.1(1 - e^{-200t} e^{200x}).$$

Напруга при $t=0$: $u(0) = 80e^{-100 \cdot 0} = 80$ В.

Вхідна напруга $u(t) = 80e^{-100t}$ В, а її похідна

$$u'(x) = -100 \cdot 80e^{-100x} = -8000e^{-100x}.$$

Підставимо всі знайдені виразив загальну формулу Дюамеля:

$$\begin{aligned}
i(t) &= u(0)y(t) + \int_0^t u'(x)y(t-x)dx = \\
&= 80 \cdot 0.1(1 - e^{-200t}) - \int_0^t 8000e^{-100x} \cdot 0.1(1 - e^{-200t}e^{200x})dx = \\
&= 8(1 - e^{-200t}) - 800 \int_0^t e^{-100x}dx + 800e^{-200t} \int_0^t e^{100x}dx
\end{aligned}$$

Інтегрування проводимо по часу x ; час t розглядається як постійна величина, тому співмножники, які містять t і не містять x , можуть бути винесені з під знаку інтеграла.

$$\begin{aligned}
i(t) &= 8 - 8e^{-200t} + 8e^{-100x} \Big|_0^t + 8e^{-200t} e^{100x} \Big|_0^t = \\
&= 8 - 8e^{-200t} + 8e^{-100t} - 8 + 8e^{-100t} - 8e^{-200t} = 16e^{-100t} - 16e^{-200t} \quad \text{А.}
\end{aligned}$$

Напруга на активному опорі:

$$u_R(t) = iR = (16e^{-100t} - 16e^{-200t})10 = 160e^{-100t} - 160e^{-200t} \quad \text{В.}$$

Напруга на індуктивності:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0.05(-100 \cdot 16e^{-100t} + 200 \cdot 16e^{-200t}) = -80e^{-100t} + 160e^{-200t} \quad \text{В.}$$

Згідного з другим законом Кірхгофа $u(t) = u_R(t) + u_L(t)$.

Побудуємо графіки напруги, для цього виділимо особливі точки. Визначимо момент часу, коли напруга на індуктивності проходить через нуль:

$$\begin{aligned}
u_L(t) = 0 &\Rightarrow -80e^{-100t_{m_1}} + 160e^{-200t_{m_1}} = 0 \Rightarrow 80e^{-100t_{m_1}} = 160e^{-200t_{m_1}} \\
\frac{e^{-100t_{m_1}}}{e^{-200t_{m_1}}} &= \frac{160}{80} \Rightarrow e^{100t_{m_1}} = 2 \Rightarrow 100t_{m_1} = \ln 2 = 0.693 \\
t_{m_1} &= \frac{0.693}{100} = 0.00693 \quad \text{с.}
\end{aligned}$$

В цей час струм та пропорційна струму напруга на активному опорів досягає максимуму; з іншого боку $u_L(t) = 0$, тому

$$u_R(t_{m_1}) = u(t_{m_1}) = 80e^{-100t_{m_1}} = 80e^{-0.693} = 80 \cdot 0.5 = 40 \quad \text{В.}$$

При $t > t_{m1}$, струм та напруга на активному опорі падають, напруга на індуктивності – від’ємна. Визначимо момент часу t_{m2} в який напруга на індуктивності досягає від’ємного максимуму.

$$\frac{du_L}{dt} = -100 \cdot (-80e^{-100t_{m2}}) - 200 \cdot 160e^{-200t_{m2}} = 8000e^{-100t_{m2}} - 32000e^{-200t_{m2}};$$

$$8000e^{-100t_{m2}} - 32000e^{-200t_{m2}} = 0$$

$$8000e^{-100t_{m2}} = 32000e^{-200t_{m2}}$$

$$\frac{e^{-100t_{m2}}}{e^{-200t_{m2}}} = \frac{32000}{8000}$$

$$e^{100t_{m2}} = 4$$

$$100t_{m2} = \ln 4 = 1.386$$

$$t_{m2} = \frac{1.386}{100} = 0.01386 \text{ с.}$$

В цей момент часу напруга на індуктивності

$$u_L(t_{m2}) = -80e^{-1.386} + 160e^{-2.773} = -10 \text{ В.}$$

При $t = t_{m2}$ крива напруги на активному опорі має точку перегину.

На рис. 15.2 зображені криві напруг.

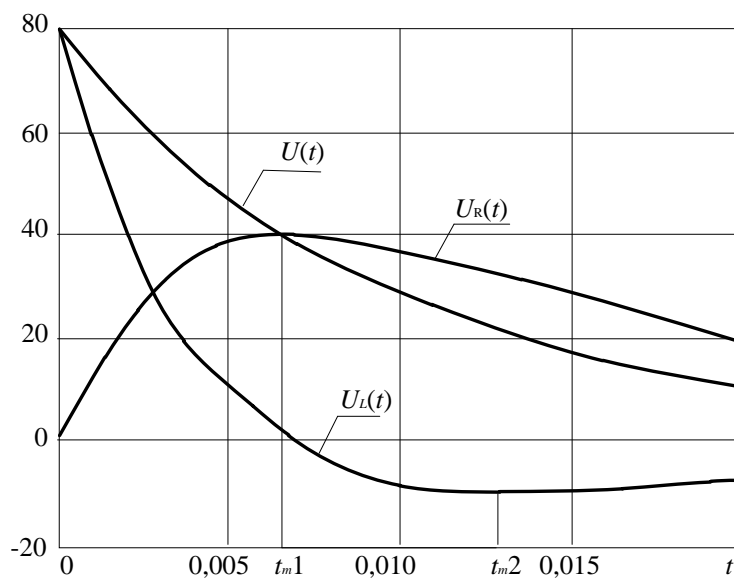


Рис. 15.2

ЗАДАЧА 15.2

На вхід кола рис. 15.3, а подана напруга $u(t)$ рис. 15.3, б.

Параметри кола

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 50 \text{ Ом}$$

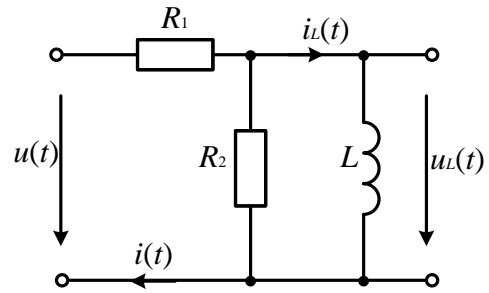
$$L = 40 \text{ мГн}$$

$$t_1 = 3 \text{ мс}$$

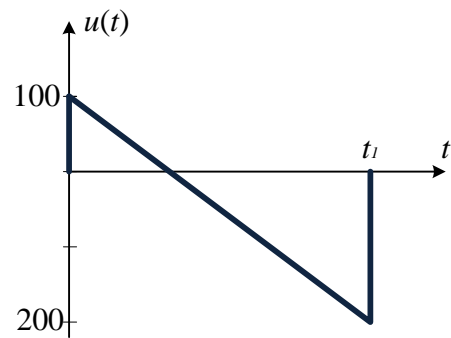
$$U_1 = 100 \text{ В}$$

$$U_2 = -200 \text{ В}$$

Виконати розрахунок напруги на котушці індуктивності (на виході).



а)



б)

Рис. 15.3

Розв'язання:

Визначимо перехідні характеристики кола для цього ввімкнемо двополюсник на постійну напругу $U=1$ В та розрахуємо перехідні струми.

Запишемо закони змінення перехідних струмів та напруг у загальному вигляді:

$$i(t) = i_{\text{вим}} + Ae^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$i_L(t) = i_{L\text{вим}} + De^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = u_{L\text{вим}} + Be^{\frac{-t}{\tau}}$$

Розглянемо режим в момент комутації ($t=0$):

$$i(0) = \frac{U}{(R_1 + R_2)} = \frac{1}{(20 + 50)} = 1.429 \cdot 10^{-2} \text{ А};$$

$$i_L(0) = 0;$$

$$u_L(0) = i_{(0)} R_2 = 1.429 \cdot 10^{-2} \cdot 50 = 0.714 \text{ В}.$$

Розрахуємо вимушені складові перехідних величин:

$$i_{\text{ВИМ}} = i_{L\text{ВИМ}} = \frac{U}{R_1} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ А};$$

$$u_{L\text{ВИМ}} = 0$$

Стала часу:

$$\tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2} = \frac{4 \cdot 10^{-2} (20 + 50)}{20 \cdot 50} = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Проведемо розрахунок сталих інтегрування:

$$A = i(0) - i_{\text{ВИМ}} = (1.429 - 5)10^{-2} = -3.57 \cdot 10^{-2};$$

$$D = i_L(0) - i_{L\text{ВИМ}} = 0 - 0.05 = -0.05;$$

$$B = u_L(0) - u_{L\text{ВИМ}} = 0.714.$$

Запишемо вирази для перехідних провідностей:

$$y(t) = i(t)|_{U=1} = 10^{-2} (5 - 3.57e^{-357t});$$

$$y_L(t) = i_L(t)|_{U=1} = 0.05(1 - e^{-357t});$$

$$h_{u_L}(t) = u_L(t)|_{U=1} = 0.714e^{-357t}.$$

Ділянка I ($0 \leq t \leq t_1$):

$$u_I(t) = U_1 - \frac{U_1 - U_2}{t_1} t = 100 - \frac{100 + 200}{3 \cdot 10^{-3}} t = 100 - 10^5 t, \text{ В}.$$

$$u'_I(t) = u'_I(\theta) = -10^5 \text{ В/с}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в формулу інтеграла Дюамеля
визначимо

- струм на вході:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= u_I(0)y(t) + \int_0^t u_I'(\theta)y(t-\theta)d\theta = \\
&= 100 \cdot 10^{-2} (5 - 3.57e^{-357t}) + \int_0^t (-10^5) \cdot 10^{-2} (5 - 3.57e^{-357(t-\theta)}) d\theta = \\
&= 5 - 3.57e^{-357t} - 5 \cdot 10^3 t + 10e^{-357t} (e^{357t} - 1) = 15 - 5 \cdot 10^3 t - 13.57e^{-357t}, \quad \text{A.}
\end{aligned}$$

- струм через індуктивність:

$$\begin{aligned}
i_{L_i}(t) &= u_I(0)y_L(t) + \int_0^t u_I'(\theta)y_L(t-\theta)d\theta = \\
&= 100 \cdot 0.05(1 - e^{-357t}) + \int_0^t (-10^5) \cdot 0.05(1 - e^{-357(t-\theta)}) d\theta = \\
&= 5 - 5e^{-357t} - 5 \cdot 10^3 t + 14e^{-357t} (e^{357t} - 1) = 19 - 5 \cdot 10^3 t - 19e^{-357t} \quad \text{A.}
\end{aligned}$$

- напругу на індуктивності:

$$\begin{aligned}
u_{L_i}(t) &= u_I(0)h_{u_L}(t) + \int_0^t u_I'(\theta)h_{u_L}(t-\theta)d\theta = \\
&= 100 \cdot 0.714e^{-357t} + \int_0^t (-10^5)0.714e^{-357(t-\theta)} d\theta = \\
&= 71.4e^{-357t} - 200e^{-357t} (e^{357t} - 1) = -200 + 271.4e^{-357t}, \quad \text{B.}
\end{aligned}$$

Перевірку правильності розрахунків проводимо для моменту $t=0$:

$$i_L(0)=0; \quad 19-19=0; \quad 0=0$$

$$u_I(t) = i_L(t)R_1 + u_{L_i}(t);$$

$$100 - 10^5 t = 20(15 - 5 \cdot 10^3 t - 13.57e^{-357t} - 200 + 271.4e^{-357t})$$

$$100 - 10^5 t = 100 - 10^5 t$$

$$u_{L_i}(t) = L \frac{di_{L_i}(t)}{dt};$$

$$-200 + 271e^{-357t} \approx 0.04((-19) \cdot (-357)e^{-357t} - 5 \cdot 10^3)$$

$$-200 + 271e^{-357t} \approx -200 + 271e^{-357t}$$

Ділянка II ($t_1 \leq t \leq \infty$):

$$u_{II}(t) = 0;$$

$$u'_{II}(t) = u'_{II}(\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} i_{II}(t) &= u_I(0)y(t) + \int_0^{t_1} u'_I(\theta)y(t-\theta)dt + (0-U_2)y(t-t_1) = \\ &= 5 - 3.57e^{-357t} - 5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 10(e^{357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} - 1)e^{-357t} + 200 \cdot 10^{-2} \left(5 - 3.57e^{-357(t-3 \cdot 10^{-3})} \right) = \\ &= -3.57e^{-357t} - 10e^{-357t} + 200 \cdot 10^{-2} \left(5 - 3.57e^{-357t} e^{357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \right) = -5.22e^{-357t}, \quad \text{A.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{L_{II}}(t) &= u_I(0)y_L(t) + \int_0^{t_1} u'_I(\theta)y_L(t-\theta)dt + (0-U_2)y_L(t-t_1) = \\ &= 5(1 - e^{-357t}) + 14(e^{357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} - 1)e^{-357t} - 5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 200 \cdot 0.05 \left(1 - e^{-357(t-3 \cdot 10^{-3})} \right) = \\ &= -7.43e^{-357t}, \quad \text{A.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{L_{II}}(t) &= u_I(0)h_{u_L}(t) + \int_0^{t_1} u'_I(\theta)h_L(t-\theta)d\theta + (0-U_2)h_{u_L}(t-t_1) = \\ &= 71.4e^{-357t} - 200(e^{357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} - 1)e^{-357t} + 200 \cdot 0.714e^{-357(t-3 \cdot 10^{-3})} = 104.4e^{-357t}, \quad \text{B.} \end{aligned}$$

Перевірку правильності розрахунків проводимо для моменту $t=t_1$:

$$i_{L_I}(t_1) = i_{L_{II}}(t_1) \Rightarrow$$

$$19 - 5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} - 19e^{-357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = -7.43e^{-357 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}$$

$$-2.52 \approx -2.52$$

Практичне заняття 16.

Підготовка до модульної контрольної роботи 2.

Розрахунок перехідних процесів в лінійному електричному колі

Практичне заняття 16 присвячене написання рубіжної модульної контрольної роботи. Для підготовки до МКР 2 рекомендовано опрацювати всі попередні завдання практичних робіт з 8 по 16 та завдання винесені для самостійного опрацювання.

ЗАДАЧА 16.1

Виконати розрахунок перехідних струмів на всіх ділянках кола та напруг на реактивних елементах за заданих параметрів кола:

$$U = 200 \text{ В};$$

$$R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_4 = 25 \text{ Ом};$$

$$L_2 = 10 \text{ мГн};$$

$$C_3 = 100 \text{ мкФ}.$$

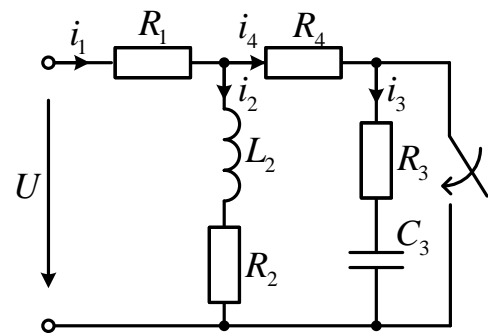


Рис. 16.1

Розрахунок провести а) класичним та б) операторним методами. Розрахувати сталу часу та побудувати часові діаграми перехідних функцій.

ЗАДАЧА 16.2

Виконати розрахунок перехідних струмів на всіх ділянках кола та напруг на реактивних елементах за заданих параметрів кола:

$U = 200 \text{ В};$
 $R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом};$
 $R_3 = R_4 = 25 \text{ Ом};$
 $C_2 = 100 \text{ мкФ};$
 $L_3 = 10 \text{ мГн}.$

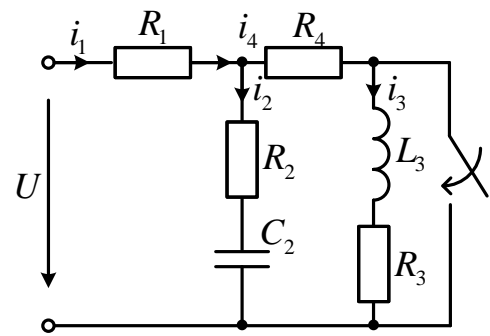


Рис. 16.2

Розрахунок провести а) класичним та б) операторним методами.

Розрахувати сталу часу та побудувати часові діаграми перехідних функцій.

Розділ 5

ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Практичне заняття 17.

Визначення параметрів однорідної довгої лінії.

Неспотворювальна лінія

17.1. Розрахунок параметрів лінії та режимів її роботи

ЗАДАЧА 17.1.1. Трифазна сталелюмінієва повітряна лінія електропередачі завдовжки $l=300$ км має наступні параметри (на фазу):

$$R_0=0,08 \text{ Ом/км}, G_0 = 3.75 \cdot 10^{-8} \text{ См/км}, \omega L_0 = 0.42 \text{ Ом/км}, \omega C_0 = 2.7 \text{ мкСм/км}.$$

Обчислити вторинні параметри лінії, фазову швидкість і довжину хвилі.

Визначити фазну напругу, струм і активну потужність на початку лінії, її ККД, якщо на приймальному кінці лінійна напруга 330 кВ, активна потужність 300 МВт і коефіцієнт потужності навантаження дорівнює $0,92$ ($\varphi_2 > 0$).

Обчислити комплекси напруги падаючої та відбитої хвиль на початку і в кінці ЛЕП.

Розв'язання

Приймемо, що навантаження лінії симетричне, з'єднане зіркою, а розрахунок виконаємо для однієї фази. Вторинні параметри лінії:

- характеристичний опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0.08 + j0.42}{(3.75 \cdot 10^{-8} + j2.7 \cdot 10^{-6})}} = 398e^{-j5} \text{ Ом},$$

- коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(0.08 + j0.42)(3.75 \cdot 10^{-8} + j2.7 \cdot 10^{-6})} = (0.108 + j1.069) \cdot 10^{-3} \text{ 1/км}. \end{aligned}$$

Звідси коефіцієнт згасання $-\alpha = \text{Re}\{\underline{\gamma}\} = 0.108 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$,

коефіцієнт фази – $\beta = \text{Im}\{\underline{\gamma}\} = 1.069 \cdot 10^{-3} \text{ рад/км}$.

Фазова швидкість і довжина хвилі:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{1.069 \cdot 10^{-3}} = 294000 \text{ км/с}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1.069 \cdot 10^{-3}} = 5880 \text{ км}.$$

Обчислюємо гіперболічні функції:

$$\underline{\gamma}l = (0.108 + j1.069) \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 0.033 + j0.321;$$

$$e^{\underline{\gamma}l} = 1.033e^{j18.4^\circ} = 0.980 + j0.326 \quad e^{-\underline{\gamma}l} = 0.968e^{-j18.4^\circ} = 0.919 - j0.305$$

$$\text{sh}\underline{\gamma}l = \frac{e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}}{2} = 0.317e^{j84.4^\circ}$$

$$\text{ch}\underline{\gamma}l = \frac{e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}}{2} = 0.950e^{j0.62^\circ}$$

Отримаємо комплекси фазної напруги і струму в кінці лінії:

$$\dot{U}_{2\phi} = \frac{\dot{U}_{2\phi}}{\sqrt{3}} = \frac{330}{\sqrt{3}} = 190,5 \text{ кВ}; \quad \cos \varphi_2 = 0.92 \text{ тому } \varphi_2 = 23.1^\circ$$

$$I_{2\phi} = \frac{P_2}{3\dot{U}_{2\phi} \cos \varphi_2} = \frac{300}{3 \cdot 190,5 \cdot 0,92} = 0,571 \text{ кА};$$

$$\psi_{i_2} = \psi_{u_2} - \varphi_2 = -\varphi_2 = -23.1^\circ$$

$$\dot{I}_{2\phi} = I_{2\phi} e^{j\psi_{i_2}} = 0.571 e^{-j23.1^\circ} \text{ кА}.$$

За основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях розрахуємо комплекси фазної напруги і струму на початку лінії:

$$\dot{U} = \dot{U}_{2\phi} \text{ch}\underline{\gamma}x + \underline{Z}_C \dot{I}_{2\phi} \text{sh}\underline{\gamma}x = 190,5 \cdot 0.950 e^{j0.62^\circ} +$$

$$+ 398 e^{-j5^\circ} \cdot 0.571 e^{-j23.1^\circ} \cdot 0.317 e^{j84.4^\circ} = 229,3 e^{j15,6^\circ}$$

$$\dot{I} = \dot{I}_{2\phi} \text{ch}\underline{\gamma}x + \frac{\dot{U}_{2\phi}}{\underline{Z}_C} \text{sh}\underline{\gamma}x = 0.571 e^{-j23.1^\circ} \cdot 0.950 e^{j0.62^\circ} + \frac{190,5}{398 e^{-j5^\circ}} 0.317 e^{j84.4^\circ} = 0,505 e^{-j6,3^\circ}$$

Активна потужність на початку лінії

$$P_1 = 3 \text{Re} \left\{ \dot{U}_{1\phi}^* \dot{I}_{1\phi} \right\} = 322 \text{ МВт}.$$

Коефіцієнт корисної дії лінії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{300}{322} = 0.93.$$

Електромагнітні процеси в довгій лінії розглядаються як результат накладання падаючої (прямої) та відбитої (зворотної) хвиль:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_e + \dot{U}_n = \underline{A}_1 e^{\gamma x} + \underline{A}_2 e^{-\gamma x}; \\ \dot{i} &= -\dot{i}_e + \dot{i}_n = -\frac{\underline{A}_1 e^{\gamma x}}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{A}_2 e^{-\gamma x}}{\underline{Z}_C}.\end{aligned}$$

де A_1 і A_2 – постійні інтегрування, які визначаються, наприклад, через напругу і струм в кінці лінії:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_{2\phi} - \underline{Z}_C \dot{I}_{2\phi}) e^{-\gamma l} = 51,9 e^{j76,8^\circ}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \dot{I}_{2\phi}) e^{\gamma l} = 209,3 e^{j3,1^\circ}$$

На початку лінії $x = 0$, тому

$$\dot{U}_n(x=0) = \underline{A}_2 = 209,3 e^{j3,1^\circ}$$

$$\dot{U}_e(x=0) = \underline{A}_1 = 51,9 e^{j76,8^\circ}$$

$$\dot{i}_n(x=0) = \frac{\dot{U}_n(x=0)}{\underline{Z}_C} = 0.526 e^{j8,1^\circ}$$

$$\dot{i}_e(x=0) = \frac{\dot{U}_e(x=0)}{\underline{Z}_C} = 0.13 e^{j81,8^\circ}$$

В кінці лінії $x = l$, тому

$$\dot{U}_n(x=l) = \underline{A}_2 e^{-\gamma l} = \frac{\dot{U}_{2\phi} + \underline{Z}_C \dot{I}_{2\phi}}{2} = 202,6 e^{-j15,3^\circ}$$

$$\dot{U}_e(x=l) = \underline{A}_1 e^{\gamma l} = \frac{\dot{U}_{2\phi} - \underline{Z}_C \dot{I}_{2\phi}}{2} = 53,6 e^{j95,2^\circ}$$

$$\dot{i}_n(x=l) = \frac{\dot{U}_n(x=l)}{\underline{Z}_C} = 0.509 e^{-j10,3^\circ}$$

$$\dot{i}_e(x=l) = \frac{\dot{U}_e(x=l)}{\underline{Z}_C} = 0.135 e^{j100,2^\circ}$$

Як і слід було чекати, внаслідок втрат в лінії падаюча хвиля зменшується в напрямі від початку до кінця лінії, а відбита – в напрямі від кінця лінії до початку.

ЗАДАЧА 17.1.2. В кінці лінії задачі 17.1.1 сталося:

- а) вимкнення навантаження;
- б) трифазне коротке замикання.

Для кожного випадку визначити лінійні напруги і струми на початку і в кінці лінії, якщо фазна напруга на вході залишилася такою, як розраховано в задачі 17.1.1. Визначити також значення напруги і струму падаючої і відбитої хвиль в кінці лінії.

Розв'язання

При розв'язанні задачі скористаємося основними рівняннями довгої лінії в гіперболічних функціях:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_C \dot{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x & \dot{U}(y) &= \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y + \underline{Z}_C \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} y \\ \dot{I}(x) &= -\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x & \dot{I}(y) &= \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} y + \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} y \end{aligned}$$

а) при вимкненні навантаження (режим неробочого ходу) струм в кінці лінії

$$\dot{I}_{2\phi} = 0, \text{ тому}$$

$$\dot{U}_{2\phi} = \frac{\dot{U}_{1\phi}}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \frac{241 e^{j15^\circ}}{0.95 e^{j0.6^\circ}} = 241 e^{j15^\circ} \quad U_{2L} = \sqrt{3} U_{2\phi} = \sqrt{3} \cdot 241 = 418$$

$$\dot{I}_{1\phi} = \frac{\dot{U}_{2\phi} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_C} = \frac{241 e^{j15^\circ}}{398 e^{-j5^\circ}} \cdot 0.317 e^{j84.4^\circ} = 0.192 e^{j104.4^\circ} \quad I_{1L} = I_{1\phi} = 0.192$$

У режимі неробочого ходу коефіцієнт відбиття +1, тобто падаюча хвиля відбивається повністю, причому без зміни знаку. Тому

$$\dot{U}_n(x=l) = \dot{U}_e(x=l).$$

Зважаючи на це,

$$\dot{U}_{2\phi} = \dot{U}_n(x=l) + \dot{U}_e(x=l) = 2\dot{U}_n(x=l) = 241 e^{j15^\circ} \text{ кВ},$$

звідки

$$\dot{U}_n(x=l) = \dot{U}_e(x=l) = \frac{\dot{U}_{2\Phi}}{2} = 120,5e^{j15^\circ} \text{ кВ},$$

$$\dot{I}_n(x=l) = \dot{I}_e(x=l) = \frac{\dot{U}_n(x=l)}{\underline{Z}_C} = 0,303e^{j10^\circ} \text{ кА}.$$

б) при короткому замиканні напруга в кінці лінії $\dot{U}_{2\Phi} = 0$, тому

$$\dot{I}_{2\Phi} = \frac{\dot{U}_{1\Phi}}{\underline{Z}_C \operatorname{sh} \gamma l} = \frac{229,3e^{j15,6^\circ}}{398e^{-j5^\circ} \cdot 0,317e^{j84,4^\circ}} = 1,817e^{-j63,8^\circ} \quad I_{2Л} = I_{2\Phi} = 1,817$$

$$\dot{I}_{1\Phi} = \dot{I}_{2\Phi} \operatorname{ch} \gamma l = 1,817e^{-j63,8^\circ} \cdot 0,95e^{j0,6^\circ} = 1,726e^{-j63,2^\circ} \quad I_{1Л} = I_{1\Phi} = 1,726$$

У режимі короткого замикання коефіцієнт відбиття дорівнює -1. Тому

$$\dot{I}_n(x=l) = -\dot{I}_e(x=l). \text{ З урахуванням цього}$$

$$\dot{I}_{2\Phi} = \dot{I}_n(x=l) - \dot{I}_e(x=l) = 2\dot{I}_n(x=l) = 1,817e^{-j63,8^\circ}$$

Звідки

$$\dot{I}_e(x=l) = -\dot{I}_n(x=l) = \frac{\dot{I}_{2\Phi}}{2} = 0,909e^{-j63,8^\circ} \text{ кА},$$

$$\dot{U}_n(x=l) = -\dot{U}_e(x=l) = \dot{I}_n(x=l)\underline{Z}_C = 362e^{-j58,8^\circ} \text{ кВ}.$$

17.2. Лінії, узгоджені з навантаженням

ЗАДАЧА 17.2.1. Для трифазної ЛЕП, узгодженої з навантаженням, відомі комплекси фазної напруги на початку лінії $\dot{U}_1 = 100 \text{ кВ}$ і фазного струму в кінці лінії $\dot{I}_2 = 190e^{-j90^\circ} \text{ А}$. Визначити ККД лінії, якщо її характеристичний опір $\underline{Z}_C = 500e^{-j10^\circ} \text{ Ом}$.

Розв'язання

Оскільки лінія узгоджена з навантаженням, опір навантаження дорівнює характеристичному, і тоді напруга в кінці лінії

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_C = 0,19e^{-j90^\circ} \cdot 500e^{-j10^\circ} = 95e^{-j100^\circ} \text{ кВ}$$

Оскільки при узгодженому навантаженні $U_2 = U_1 e^{-\alpha l}$, то

$$e^{-\alpha l} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{95}{100} = 0.95.$$

$$\text{ККД лінії } \eta = e^{-2\alpha l} = 0.95^2 = 0.903.$$

ЗАДАЧА 17.2.2. Повітряна двопровідна лінія завдовжки 100 км навантажена на опір $\underline{Z}_C = 410e^{-j35^\circ}$ Ом.

Напруга на вході лінії – $u_1(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t + 120^\circ)$ В,

на виході – $u_2(t) = 188.7\sqrt{2} \sin(314t + 79.9^\circ)$ В.

Визначити струм і напругу, записати їх миттєві значення в точці А, яка розташована в 20 км від кінця лінії.

Розв'язання

Рівняння лінії в узгодженому режимі:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma l} = \dot{U}_2 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\gamma l} = \dot{I}_2 e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$$

Для розрахунку струму і напруги в точці А необхідно знати параметри лінії: коефіцієнт згасання α і коефіцієнт фази β . Знаходимо їх з першого рівняння лінії:

$$e^{\gamma l} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{220e^{j120^\circ}}{188.7e^{j79.9^\circ}} = 1.166e^{j40.1^\circ}, \text{ де } 40.1^\circ = +0.7 \text{ рад};$$

$$e^{\alpha l} = 1.166; \quad \alpha l = \ln(1.166) = 0.153; \quad \alpha = 0.00153 \text{ Нп/км}; \quad \beta l = 0.7 + 2\pi k \text{ рад.}$$

Орієнтовне значення коефіцієнта фази

$$\beta_{op} = \frac{\omega}{v} = \frac{314}{3 \cdot 10^5} \approx 10^{-3} \text{ рад/км}; \quad \beta_{op} l = 0.1 \text{ рад};$$

де $v = c = 300000$ (фазова швидкість у повітряній лінії практично рівна швидкості світла);

таким чином, $k = 0$ і $\beta = 0.007 \text{ рад/км}$.

Тоді напруга в точці А:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_2 e^{-\gamma y} = 188.7 e^{j79.9^\circ} \cdot e^{0.00153 \cdot 20} \cdot e^{j0.007 \cdot 20} = 194.6 e^{j79.9^\circ} \cdot e^{j0.14 \text{ рад} = 8.02^\circ} = B.$$

$$= 194.6 e^{j87.92^\circ}$$

Співвідношення $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_C$ справедливо для будь-якого перерізу лінії, тому струм в точці A можна обчислити як

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{194.6 e^{j87.92^\circ}}{410 e^{-j30^\circ}} = 0.475 e^{j117.92^\circ} \text{ A.}$$

Миттєві значення напруги і струму:

$$u_A(t) = 194.6 \sqrt{2} \sin(314t + 87.92^\circ) \text{ В, } i_A(t) = 0.475 \sqrt{2} \sin(314t + 117.92^\circ)$$

17.3. Лінії без спотворень

ЗАДАЧА 7.3.1. Повітряна двопровідна лінія зв'язку завдовжки 100 км має параметри: $r_0 = 2,8 \text{ Ом/км}$, $g_0 = 0,7 \text{ мкСм/км}$, $L_0 = 2 \text{ мГн/км}$ і працює в узгодженому режимі при частоті $\omega = 5000 \text{ рад/с}$. Яку додаткову індуктивність L_0' необхідно увімкнути на кожен кілометр довжини лінії, щоб в ній не було спотворень, а вихідна напруга відставала від вхідного на 100° за фазою?

Розв'язання

За умовою зсув фаз в лінії складає

$$\beta l = 100^\circ + 360^\circ k = 1.745 + 2\pi k \text{ рад, тобто } \beta = (1.745 + 2\pi k) 10^{-2} \text{ рад/км.}$$

Оцінимо значення β . Фазова швидкість у повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла, тому $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{5000}{300000} = 1.667 \cdot 10^{-2} \text{ рад/км.}$

З порівняння двох отриманих відповідей приходимо до висновку, що $k = 0$. Остаточно маємо $\beta = 0,01745 \text{ рад/км.}$

Для лінії без спотворень справедливими наступні співвідношення

$$\beta = \omega \sqrt{(L_0 + L_0') C_0} \quad \text{і} \quad \frac{R_0}{L_0 + L_0'} = \frac{G_0}{C_0}$$

або

$$\frac{\beta}{\omega} = \sqrt{(L_0 + L_0')C_0} \quad \text{і} \quad \sqrt{\frac{L_0 + L_0'}{C_0}} = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$$

Перемножуючи дві останні рівності, знаходимо

$$(L_0 + L_0') = \frac{\beta}{\omega} \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \frac{0.01745}{5000} \sqrt{\frac{2.5}{0.7 \cdot 10^{-6}}} = 0.00698 \text{ Гн/км.}$$

І нарешті: $L_0' = 6.98 - 2 = 4.98 \text{ мГн/км.}$

17.4. Лінії без втрат

ЗАДАЧА 17.4.1. В кінці повітряної лінії без втрат увімкнений вольтметр, який показує 100 В. Визначити показ амперметра на відстані 2 м від кінця лінії, якщо частота генератора $f = 3 \cdot 10^7 \text{ Гц}$, а хвильовий опір лінії $Z_C = 1000 \text{ Ом}$.

Розв'язання

В кінці лінії увімкнений вольтметр з великим опором. Отже, лінія працює у режимі неробочого ходу, струм в кінці лінії $I_2 = 0$, тому одне з основних рівнянь ЛБВ

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y + j Z_C I_2 \sin \beta y$$

$$\dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \beta y + I_2 \cos \beta y$$

приймає вигляд: $\dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \beta y$

Фазова швидкість в повітряній лінії практично дорівнює швидкості світла $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Тоді коефіцієнт фази лінії:

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = 0.2\pi \text{ рад/м.}$$

Таким чином, показ амперметра

$$I_A = \left| \dot{I}(y=0) \right| = \frac{U_2}{Z_C} \sin(\beta y) = \frac{100}{1000} \sin(0.2\pi \cdot 2) = 0.0951 \text{ А.}$$

ЗАДАЧА 8.29. Повітряна лінія без втрат з параметрами: $l = 30 \text{ м}$, $f = 15 \text{ МГц}$, $Z_C = 600 \text{ Ом}$ працює на навантаження: $U_2 = 120 \text{ В}$, $r_H = 300 \text{ Ом}$. Визначити положення мінімумів і максимумів напруги уздовж лінії.

Розв'язання

Відомо, що у режимі неробочого ходу або при короткому замиканні в лініях без втрат виникають стоячі хвилі. Оскільки при цьому коефіцієнт відбиття $n = \pm 1$, пряма і зворотна хвилі однакові за величиною, їх накладання дає вузли і пучності напруги, які розподілені уздовж лінії при НХ (КЗ) відповідно до виразів:

$$y_{\text{вузлів(пучностей)}} = \frac{(2k+1)\lambda}{4}; \quad y_{\text{пучностей(вузлів)}} = \frac{k\lambda}{2}; \quad k=0, 1, 2, \dots$$

При довільному неузгодженому навантаженні $|K| < 1$, пряма і зворотна хвилі не рівні між собою. В результаті накладання цих хвиль в лінії виникають мінімуми і максимуми напруги. Очевидно, що вони будуть в тих точках, де пряма і зворотна хвилі або збігаються за фазою (максимуми), або відрізняються на 180° (мінімуми).

1. Визначимо коефіцієнт відбиття K хвилі від навантаження і оцінимо напругу прямої і зворотної хвиль U_{np} , U_{zv} .

$$n = \frac{r_H - Z_C}{r_H + Z_C} = \frac{300 - 600}{300 + 600} = -0.333, \text{ тобто } U_{zv} = -0.333U_{np}.$$

В кінці лінії напруга знаходиться як

$$U_2 = U_{np} + U_{zv} = U_{np} - 0.333U_{np} = 0.667U_{np} = 120 \text{ В}.$$

Оскільки $K < 0$, то в кінці лінії має місце мінімум напруги, тобто $U_{\min} = 120 \text{ В}$, причому:

$$U_{np} = \frac{U_{\min}}{0.667} = 180 \text{ В}, \quad U_{zv} = -0.333U_{np} = -60 \text{ В}.$$

Максимальне значення напруги $U_{\max} = 180 + 60 = 240 \text{ В}$.

2. Отже, перший мінімум напруги знаходиться в кінці лінії. Далі мінімуми напруги слідує через $\lambda/2$. Оцінимо довжину хвилі:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{300 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^6} = 20 \text{ м.}$$

Максимуми напруги зсунені відносно мінімумів на $\lambda / 4 = 5 \text{ м}$ і далі по лінії також йдуть через $\lambda / 2$.

Розділ 6

НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ І МАГНІТНІ КОЛА

Практичне заняття 18.

Графічний та графоаналітичний методи розрахунку нелінійного кола постійного струму

Між величинами, що характеризують електричні і магнітні кола, існує формальна аналогія:

Електричні кола		Магнітні кола	
Струм	$I, \text{А}$	Потік	$\Phi, \text{Вб}$
ЕРС	$E, \text{В}$	МРС	$F=Iw, \text{А}$
Опір	$R, \text{Ом}$	Магнітний опір	$R_M, 1/\text{Гн}$
Напруга	$U, \text{В}$	Магнітна напруга	$U_M=Hl, \text{А}$

Ця формальна аналогія поширюється на рівняння, що описують стан кіл:

- перший закон Кірхгофа: $\sum I = 0, \quad \sum \Phi = 0;$
- другий закон Кірхгофа: $\sum U_R = \sum E, \quad \sum U_M = \sum F;$
- закон Ома: $U_R = IR, \quad U_M = \Phi R_M.$

причому в останніх виразах використовуються статичні опори електричних (R) і магнітних (R_M) елементів.

Властивості нелінійних елементів визначаються їх характеристиками:

- електричних – вольт-амперними $U = f(I),$
- магнітних – вебер-амперними $\Phi = f(UM).$

Системи рівнянь, що описують стан кіл, складаються за допомогою законів Кірхгофа. З точки зору математики – це нелінійні алгебричні рівняння, для розв’язання яких застосовуються різні наближені методи, які в курсі ТОЕ називають методами розрахунку нелінійних кіл.

Найчастіше застосовують:

- 1) графічні методи; 2) графоаналітичні методи; 3) числові методи.

Властивості нелінійних елементів визначаються їх вольт-амперними характеристиками (ВАХ), які в задачах аналізу електричних кіл вважаються заданими: або знятими експериментально за допомогою вольтметрів та амперметрів, або визначаються за паспортними даними по каталогах або даних заводів-виробників.

ЗАДАЧА 18.1. На рис. 18.1,а наведена вольт-амперна характеристика лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою, на рис. 18.1,б – стабілітрона, на рис. 18.1,в – тунельного діода. Для вказаних точок (робочих точок пристрою, точок рівноваги) визначити статичні і диференціальні опори елементів.

Розв'язання

Проведемо через вказані точки прямі з початку координат і дотичні.

Для рис. 18.1,а отримуємо:

$$R_{стA} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{3}{0.1} = 30 \text{ Ом},$$

$$R_{стB} = \frac{U_B}{I_B} = \frac{20}{0.24} = 83.3 \text{ Ом},$$

$$R_{стC} = \frac{U_C}{I_C} = \frac{50}{0.32} = 156.3 \text{ Ом},$$

$$R_{дифA} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_A = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{10}{0.22} = 45.5 \text{ Ом},$$

$$R_{дифB} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_B = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{40}{0.16} = 250 \text{ Ом},$$

$$R_{дифC} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_C = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{50}{0.13} = 385 \text{ Ом}.$$

Для рис. 18.1,б отримуємо:

$$R_{стA} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{2.5}{0.4} = 6.25 \text{ Ом},$$

$$R_{стB} = \frac{U_B}{I_B} = \frac{-5}{-0} = \infty,$$

$$R_{стC} = \frac{U_C}{I_C} = -0.4 = 25 \text{ Ом},$$

$$R_{дифA} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_A = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 \text{ Ом},$$

$$R_{дифB} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_B = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{+5}{0} = \infty,$$

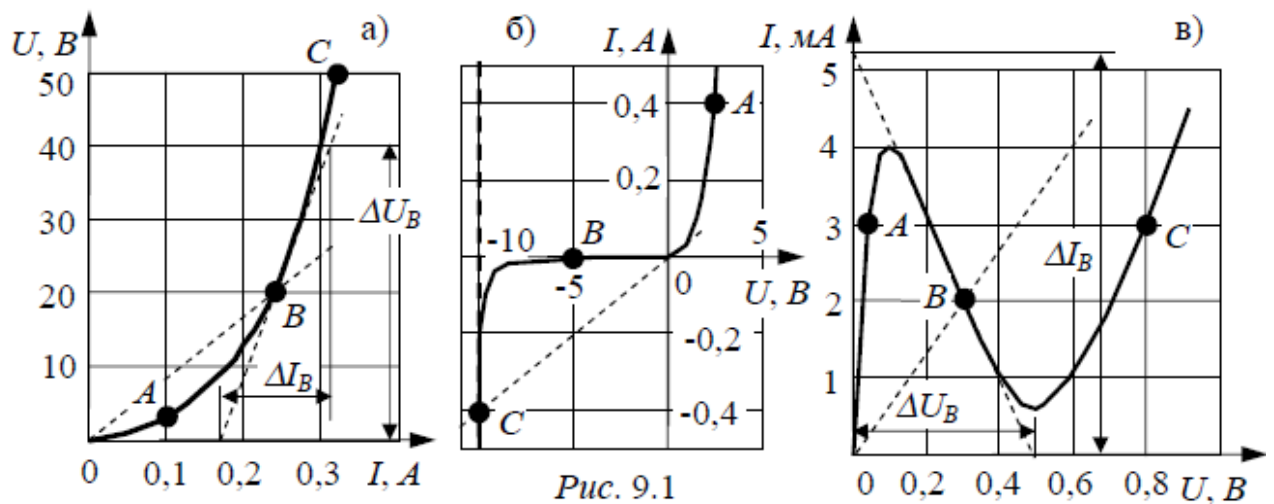
$$R_{дифC} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_C = \lim \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0}{0.4} = 0 \text{ Ом}.$$

Для рис. 18.1,в отримуємо:

$$R_{стA} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{0.04}{3 \cdot 10^{-3}} = 13.3 \text{ Ом}, \quad R_{дифA} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_A = \frac{0.04}{3 \cdot 10^{-3}} = 13.3 \text{ Ом} > 0,$$

$$R_{стB} = \frac{U_B}{I_B} = \frac{0.3}{2 \cdot 10^{-3}} = 150 \text{ Ом}, \quad R_{дифB} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_B = \frac{0.50 - 0}{(0 - 5.2) \cdot 10^{-3}} = -96.2 \text{ Ом} < 0,$$

$$R_{стC} = \frac{U_C}{I_C} = \frac{0.8}{0.3 \cdot 10^{-3}} = 267 \text{ Ом}, \quad R_{дифC} = \left. \frac{dU}{dI} \right|_C = \frac{0.3}{3 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ Ом} > 0.$$



Відмітимо, що на спадаючій ділянці вольт-амперної характеристики диференціальний опір є від'ємним.

ЗАДАЧА 18.2. Розрахувати струм у колі рис. 18.2, перевірити баланс потужностей, якщо $U = 100 \text{ В}$, $R_2(U_1 + U_3)(I) = 20 \text{ Ом}$, ВАХ нелінійних резисторів задані табл. 18.1, 18.2.

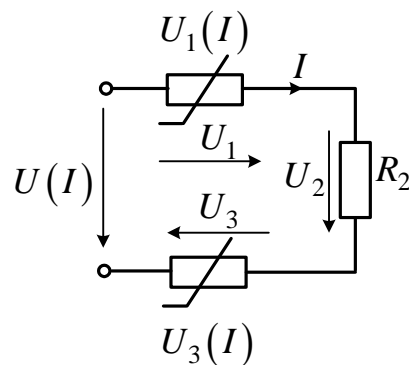


Рис. 18.2

Таблиця 18.1

$U_1, \text{В}$	0	15	20	23	30
$I_1, \text{А}$	0	0,5	1	2	4

Таблиця 18.2

$U_3, \text{В}$	0	5	15	40	80
$I_3, \text{А}$	0	1	2	3	4

Розв'язання

Скористаємося графічним методом розрахунку нелінійного електричного кола, попередньо склавши систему розрахункових рівнянь: за другим законом Кірхгофа $U_1 + U_2 + U_3 = U$, причому внаслідок послідовного з'єднання резисторів їх струми однакові: $I_1 = I_2 = I_3 = I$, зв'язки між струмами і напругами ділянок з нелінійними елементами $U_1 = f_1(I_1)$ – табл. 18.1, $U_3 = f_2(I_3)$ – табл. 18.2, а для лінійного елемента – за законом Ома аналітична залежність $U_2 = I_2 \cdot r_2$.

Графічні побудови, що відповідають наведеній системі рівнянь, показані на рис. 18.3 і виконані в системі прямокутних координат $I(U)$.

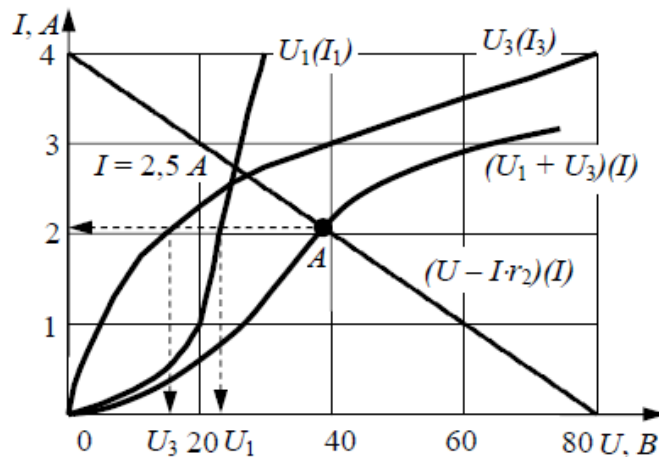


Рис. 18.3

Перепишемо перше рівняння, записане за другим законом Кірхгофа, залишивши в лівій частині напругу на нелінійних елементах, а в праву частину перенесемо лінійне співвідношення $U_2 = I_2 \cdot r_2$:

$$U_1 + U_3 = U - I_2 \cdot r_2.$$

Побудуємо допоміжні залежності (рис. 18.3) $(U_1 + U_3)(I)$ та $(U - Ir_2)(I)$, точка перетину A яких визначає розв'язання задачі:

$$I = 2,05 \text{ A}, U_1 = 23 \text{ B}, U_3 = 16 \text{ B}.$$

Перевірка балансу потужностей:

– потужність джерела живлення (генератора)

$$P_G = UI = 80 \cdot 2,05 = 164 \text{ Вт};$$

– сума потужностей, що споживаються резисторами,

$$\sum P_{II} = U_1 I + U_3 I + I_2 r_2 = 23 \cdot 2,05 + 16 \cdot 2,05 + 2,05 \cdot 20 = 164 \text{ Вт}.$$

Баланс потужностей $P_G = \sum P_{II}$ збігається, задача розв'язана вірно.

ЗАДАЧА 9.4. Графічним методом розрахувати струми в схемі рис. 18.4 та напругу джерела живлення, перевірити баланс потужностей, якщо

$$I_{13} = 5 \text{ A}, r_3 = 14 \text{ Ом},$$

вольт-амперні характеристики нелінійних резисторів задано у табл. 18.3, 18.4.

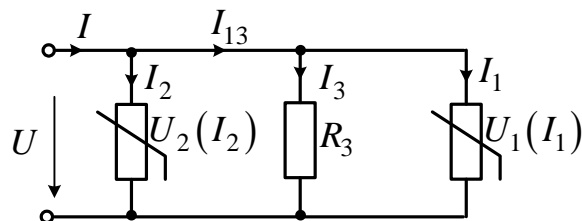


Рис. 18.4

Таблиця 18.3

$U_1, \text{ B}$	10	20	30	40	50	70
$I_1, \text{ A}$	2	3	2	1	2	4,8

Таблиця 18.4

$U_2, \text{ B}$	10	20	40	60	80
$I_2, \text{ A}$	1,25	2	2,25	3	3,3

Розв'язання

Для паралельного з'єднання рівняння запишемо за першим законом Кірхгофа, до яких додамо рівняння зв'язків між струмами і напругою ділянок:

$$I_{13} = I_1 + I_3, I = I_2 + I_{13},$$

$$I_1 = f_1(U_1), I_2 = f_2(U_2), U_3 = I_3 r_3,$$

причому $U = U_1 = U_2 = U_3$.

Розв'яжемо спочатку перше з наведених рівнянь, переписавши його у вигляді $I_1 = I_{13} - \frac{U}{r_3}$,

де зліва – струм нелінійного елементу $I_1 = f_1(U)$, заданий табл. 18.3, а справа – лінійна залежність від напруги U : $I_{13} - \frac{U}{r_3} = 5 - \frac{U}{14}$

Вказані залежності наведені на рис. 18.5,а разом з розв'язанням першого з поданих рівнянь.

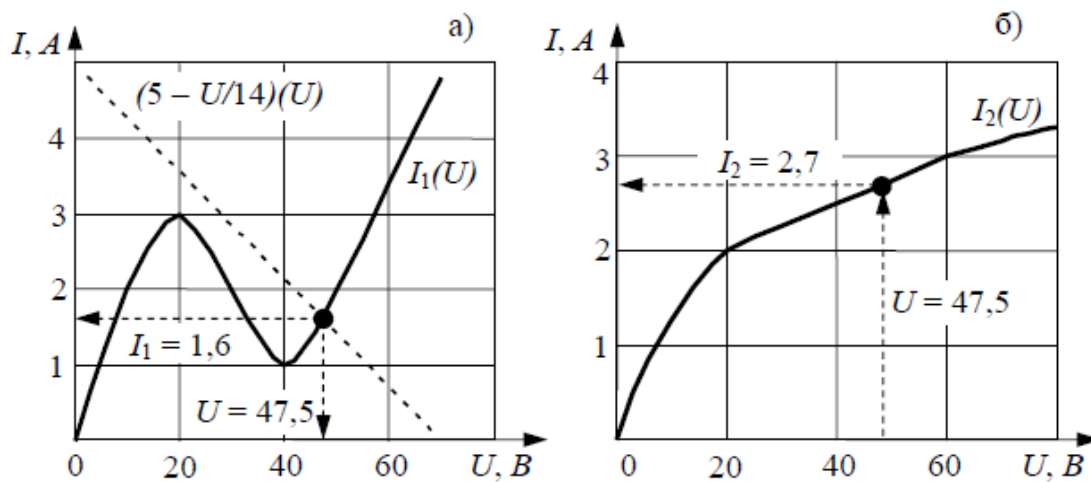


Рис. 18.5

Оскільки графічний розрахунок має значну похибку, виконаємо перевірку розв'язання за рис. 18.5,а: чи дорівнює $I_1 = I_{13} - \frac{U}{r_3}$?

Згідно графіку $I_1 = 1.6 \text{ A}$,

згідно розрахунку $I_1 = I_{13} - \frac{U}{r_3} = 5 - \frac{47.5}{14} = 1.607 \text{ A}$.

Результат відрізняється у четвертому знаці, що вказує на достатню точність розв'язання.

На рис. 18.5,б показано визначення струму I_2 .

Струм генератора $I = I_2 + I_{13} = 2,7 + 5 = 7,7 \text{ A}$.

Потужність генератора $P_G = UI = 47,5 \cdot 7,7 = 365,8 \text{ Вт}$;

Сума потужностей споживачів

$$\sum P_{II} = U \cdot I_2 + I_3^2 r_3 + U \cdot I_1 = 47,5 \cdot 2,7 + 3,393^2 \cdot 14 + 47,5 \cdot 1,6 = 365,4 \text{ Вт.}$$

$P_{II} \approx \sum P_{II}$ – виконується.

ЗАДАЧА 18.5. Розрахувати струми, перевірити баланс потужностей в схемі рис. 18.6, якщо $U=80 \text{ В}$, $r_2 = 10 \text{ Ом}$, вольт-амперні характеристики нелінійних резисторів задані табл. 18.5, 18.6.

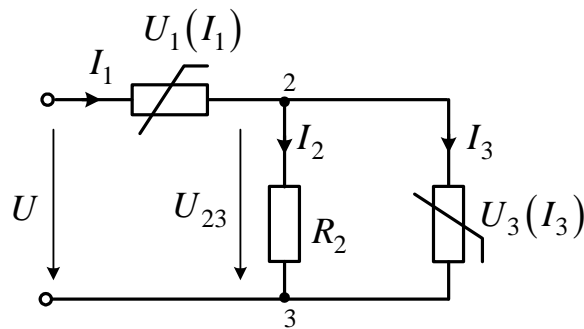


Рис. 18.6

Таблиця 18.5

$U_1, \text{В}$	20	35	46	50	53	54
$I_1, \text{А}$	2	4	6	8	10	12

Таблиця 18.6

$U_3, \text{В}$	0	5	20	40	60	90
$I_3, \text{А}$	0	2	4	5,2	6	6,5

Розв'язання

У системі координат $U(I)$ (рис. 18.7) будуємо вольт-амперні характеристики паралельно увімкнених елементів $I_3(U_3)$ і $U_2 = I_2 \cdot r_2$, а також допоміжну характеристику $(I_2 + I_3)(U_{23}) = (I_1)(U_{23})$, оскільки $I_1 = I_2 + I_3$.

За другим законом Кірхгофа $U_1 + U_{23} = U$ або $U_{23} = U - U_1$.

Будуємо допоміжну характеристику $U - U_1 = U - f_1(I_1)$, яку розраховуємо, задаючись низкою значень струму I_1 . Результати розрахунку зводимо у табл. 18.7.

Таблиця 18.7

$I_1, \text{А}$	0	20	4	6	8	10	12
$U_1, \text{В}$	0	20	35	46	50	53	54
$U - U_1 = 80 - U_1, \text{В}$	80	60	45	34	30	27	26

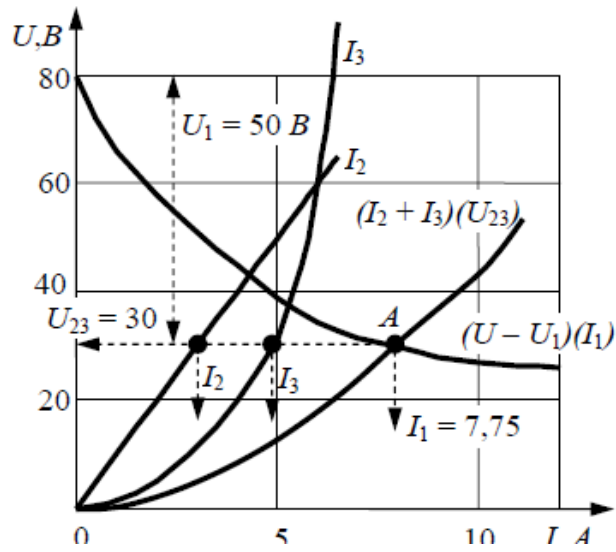


Рис. 18.7

Точка A перетину двох допоміжних кривих визначає розв'язання задачі:

$$I_1 = 7.75 \text{ A,}$$

$$U_{23} = 30 \text{ B,}$$

$$I_2 = 3 \text{ A,}$$

$$I_3 = 4.75 \text{ A,}$$

$$U_1 = 50 \text{ B.}$$

Перевірка балансу потужностей:

$$P_{\Gamma} = UI_1 = 80 \cdot 7.75 = 625 \text{ Вт,}$$

$$\sum P_{\Pi} = U_1 I_1 + I_2^2 r_2 + U_{23} I_3 = 50 \cdot 7.75 + 3^2 \cdot 10 + 30 \cdot 4.75 = 620 \text{ Вт.}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки. Збірник задач: навчальний посібник/О. В. Корощенко, В. Ф. Денник, О. А. Журавель та ін.; за аг. Ред. О. В. Корощенко. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 373 с.: іл.
2. Розрахунок перехідних процесів у лінійних колах: навч. пос./ І. А. Курило, В. П. Грудська, Л. Ю. Спінул, М. А. Щерба, - К.: НТУУ«КПІ», 2016. – 241 с.
3. Теоретичні основи електротехніки: Перехідні процеси і електричних колах: Методичні вказівки до практичних занять для студентів напрямків підготовки “Електротехніка та електротехнології”, “Електромеханіка” / Уклад.: А.А. Щерба, В.І. Чибеліс, Ю.В. Перетятко, О.О. Фаріна – К.: НТУУ “КПІ” 2011.– 81с.